（平成 29 年 8 月 17 日実施）

平成 30 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	2 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

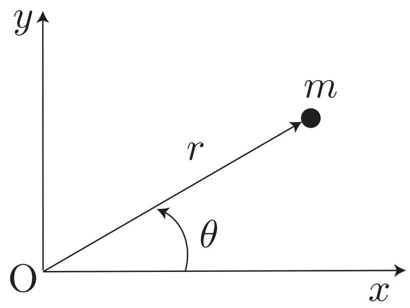
問題 I

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 質量 m の質点が、原点 O からの距離 r の位置にあるとき、そのポテンシャルエネルギーが

$$U(r) = -\frac{C}{\alpha - 1}\frac{m}{r^{\alpha-1}}$$

で与えられる中心力場を考える。ここで、C と α は $C > 0, \alpha > 1$ を満たす定数である。このとき、以下のようにして質点の軌道を求めよ。



1-1. この質点が運動する平面内で、上図のような座標系を考える。質点の位置ベクトルの大きさを r、位置ベクトルが x 軸となす角を θ とする。質点のラグランジアン $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ を書き下せ。ただし $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ とする。

1-2. 上で求めたラグランジアンから r と θ に関する運動方程式を求めよ。また、角運動量 $L = mr^2\dot{\theta}$ が保存することを示せ。

1-3. $L \neq 0$ の場合には、単位質量あたりの角運動量 $l = L/m$ を用いて時間微分を θ に関する微分に変換することができる。その結果、r に関する運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1 - r^{3-\alpha}\frac{C}{l^2}\right)\frac{1}{r} = 0 \tag{1}$$

と書けることを示せ。

1-4. $\alpha = 3$ の場合に、式 (1) の一般解を、C/l^2 の値に応じて 3 つの場合に分けて求めよ。

問 2 質量 m の惑星が、質量 M の恒星の周りを運動しており、恒星と惑星との間には万有引力が働いている。以下では万有引力定数を G とする。また、m は M に比べて十分に小さく、この系の重心は恒星の位置と同じであるとする。

2-1. 惑星が半径 r の等速円運動をしているとき、惑星の運動エネルギー T を M, m, r, G を用いて表わせ。

2-2. 次に、恒星風などにより恒星の質量が減少する場合に、惑星の軌道がどのように変化するかを考える。はじめ恒星の質量は M であり、惑星の円軌道の半径は r であった。その後恒星の質量は、惑星の公転周期に比べて十分にゆっくりと微小変化し、$M + \mathrm{d}M$ になった。その結果、惑星の円軌道の半径が $r + \mathrm{d}r$ に変化したとする。

この場合にも、問 1 と同様に中心力だけが働いているため、恒星質量が変化する前後で、惑星の角運動量が保存する。この事を用い、2 次以上の微少量を無視することで、$\mathrm{d}M$ と $\mathrm{d}r$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

2-3. 初期の恒星質量を M_0、惑星の軌道半径を r_0 とする。恒星の質量が、2-2 で求めた関係式が成り立つように十分ゆっくりと $M_0/2$ まで減少した。その結果, 惑星の軌道半径は r_0 の何倍になるか求めよ。

2-4. 次に、質量変化が速い場合の極限を考える。恒星の質量が M_0 から $M_0/2$ に瞬間的に減少したとき、惑星の運動はどのように変化するか定性的に説明せよ。

問題 II

以下の問 1 から問 2 までの全ての設問に答えよ。

問 1 真空中に、半径 a の導体円板 A、B が間隔 d で配置された平行平板コンデンサーがある。図 1 に示すように座標軸をとり、導体 B の中心を原点 O とする。以下では、真空の誘電率を ε_0、透磁率を μ_0 とする。また、$a \gg d$ であり、導体の端における電場の乱れは無視できるとする。

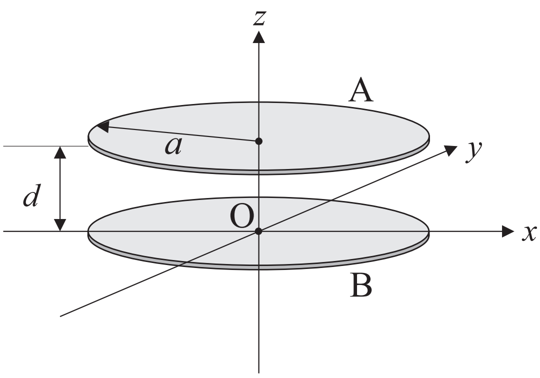


図 1

1-1. ガウスの法則を用い、導体間の電場の大きさ E とコンデンサーの静電容量 C を求めよ。

1-2. コンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U は、導体 A と B の電荷が 0 から、それぞれ $+Q$ と $-Q$ になるまで導体間で電荷を移動させるのに必要な仕事に等しい。コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーは、$U = \dfrac{Q^2}{2C}$ となることを示せ。

1-3. 導体 A と B が、それぞれ $+Q$、$-Q$ に帯電しているとき、導体間に働く力の大きさを求めよ。

1-4. それぞれ $+Q$、$-Q$ に帯電した導体 A、B 間に自己インダクタンス L のコイルを時刻 $t = 0$ に接続した。時刻 t における、導体 A の電荷 $Q(t)$ と導体 A から B へ流れる電流 $I(t)$ を求めよ。ただしコンデンサーの静電容量を C とし、コイル以外の回路のインダクタンスは無視できるものとする。

1-5. このときコイルに蓄えられたエネルギー $\dfrac{1}{2}LI^2$ とコンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U との和が保存することを示せ。

1-6. つぎにコイルを外し、帯電していないコンデンサーに交流電源を接続して、交流電圧 $V(t) = V_0 \sin\omega t$ を加えた。導体間に生じる変位電流を求めよ。ただしコンデンサーの静電容量を C とする。

1-7. また、このとき導体 A と導体 B の間の位置 $(x, 0, d/2)$ における磁束密度 B を求めよ。ただし $0 < x < a$ とする。

問 2 半径 a を持ち z 軸方向に無限に長い円柱導体に、電流が一様な電流密度 $\vec{j}$ で z 軸正方向に流れている。導体の電気伝導率を σ とし、図 2 のように導体の中心軸上に原点 O をとる。

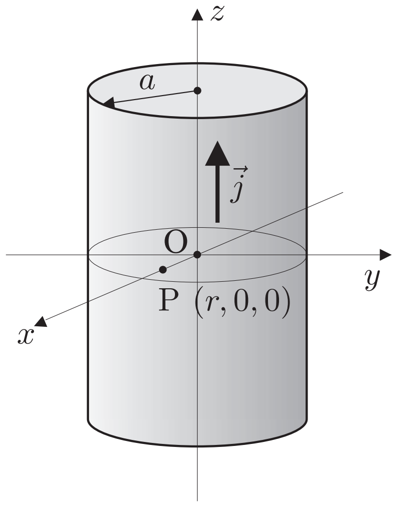


図2

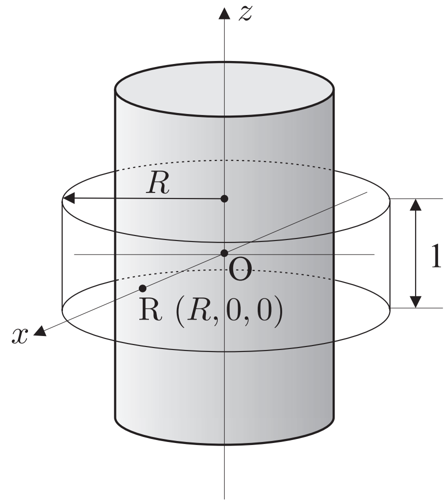


図 3

2-1. 導体の内部と外部での磁場 $\vec{H}$ の大きさを z 軸からの距離 r の関数として求めよ。

2-2. 導体内の電場は $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\sigma}$ で与えられる。このとき導体内の点 P $(r, 0, 0)$ でのポインティングベクトル $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ を求めよ。

2-3. この導体において単位時間、単位長さあたりに発生するジュール熱を求めよ。

2-4. 単位長さの導体表面においてポインティングベクトルを面積分した値を求め、2-3 で求めたジュール熱との関係を示せ。

2-5. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ をもちいて、導体外部の点 R $(R, 0, 0)$ $(R > a)$ における電場ベクトル $\vec{E}$ とポインティングベクトル $\vec{S}$ を求めよ。また図 3 に示す様に、導体と同軸で半径 R、単位長さをもつ円柱を考える。この円柱表面でポインティングベクトルを面積分した値をもとめ、2-4 で求めた値に等しくなることを示せ。