（令和元年 8 月 22 日実施）

令和 2 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	2 枚 (A4)
解答紙	問題 I	2 枚 (B4)
	問題 II	2 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図 1 のように、サイクロイド曲線で表される斜面に沿って、質量 m の小球を運動させる。ただし、小球には y 軸負の向きに大きさ mg の重力が働いている。また、斜面と小球との間の摩擦、および小球の大きさは無視できるものとする。

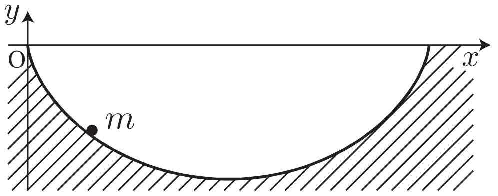

図 1

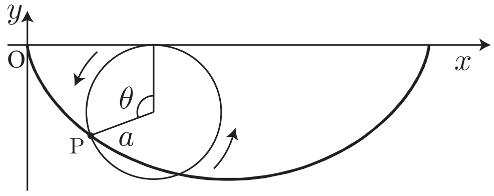

図 2

図 2 に示すように、サイクロイド曲線は半径 a の円を x 軸に沿って反時計回りに一回転させたときに、円周上の点 P が描く軌跡として定義される。サイクロイド曲線上の任意の点 (x, y) は、円の回転角 θ を用いて、次のように表される。

$$\begin{cases} x = a\theta - a\sin\theta \\ y = -a + a\cos\theta \end{cases}$$

1-1. 小球の運動エネルギーを、m、a、θ、$\dot{\theta}$ を用いて表せ。

1-2. 一般化座標を $q = 4a\cos(\theta/2)$ と定義すると、小球の Lagrangian は次式で与えられることを示せ。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{mg}{8a}q^2 + 2mga \tag{1}$$

ただし、小球が $y = 0$ の高さにあるときの位置エネルギーを 0 とする。

1-3. 式 (1) の Lagrangian から、小球に対する Euler-Lagrange 方程式を求めよ。

1-4. 小球を原点 O $(\theta = 0)$ の位置から静かにはなすと、小球は斜面を下り始めた。小球が斜面の最下点を初めて通過するまでにかかる時間を求めよ。

次に、重力に加えて、速度に比例した空気抵抗が小球に働く場合を考える。このとき、**1-3** で求めた Eular-Lagrange 方程式に、空気抵抗 $-\gamma\dot{q}$ が付け加わる。ただし、$\gamma > m\sqrt{\dfrac{g}{a}}$ とする。

1-5. 時刻 $t = 0$ に、小球を $\theta = 0$ の位置から静かにはなした。q の時間変化の様子をグラフに示せ。

問 2 ロケットは、積載した燃料を燃焼させ、発生した燃焼ガスを噴射する反作用によって推進する。そのため、ロケットの質量は時間が経つにつれて減少する。いまロケットが、時刻 $t=0$ に燃焼を開始し、重力に逆らって鉛直上方に上昇する場合を考える。時刻 $t=0$ でのロケットの質量は M_0、速さは 0 であり、燃焼ガスはロケットから見て一定の速さ w で、鉛直下向きに噴射されるとする。また、ロケットの高度に関わらず、重力加速度の大きさ g は一定であるとする。

2-1. 時刻 t におけるロケットの質量を M、ロケットが上昇する速さを V とする。図 3 のように、微小時間 dt が経過する間に、ロケットは質量 $-dM>0$ の燃焼ガスを噴射し、時刻 $t+dt$ でのロケットの質量は $M+dM$、ロケットの速さは $V+dV$ になった。
「時刻 $t+dt$ でのロケットの運動量と燃焼ガスの運動量の和」は「時刻 t でのロケットの運動量」と「時間 dt の間にロケットと燃焼ガスが重力から受けた力積」との和に等しい事を用い、次の関係式を求めよ。ただし、2 次以上の微小量は無視せよ。

$$MdV=-wdM-Mgdt \tag{2}$$

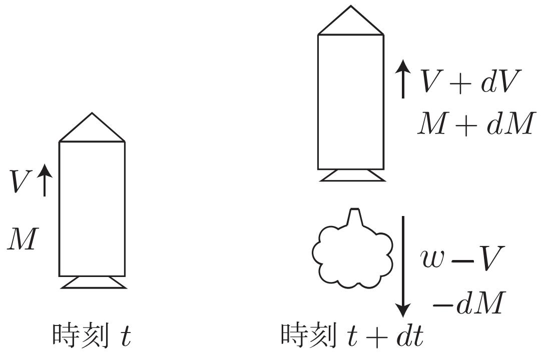

図 3

2-2. 重力加速度が無視できる場合を考える ($g=0$)。式 (2) を用いて、ロケットの質量が $M_0/2$ になったときの、ロケットの速さを求めよ。

以下では、重力加速度が無視できない場合を考える ($g\neq 0$)。簡単のために、ロケットが単位時間に噴射する燃焼ガスの質量 μ は一定であるとする $\left(\dfrac{dM}{dt}=-\mu\right)$。

2-3. 時刻 $t=0$ において、ロケットが上昇を開始するために、燃焼ガスの速さ w が満たすべき条件を求めよ。

2-4. 前問の条件が満たされている場合を考える。ロケットの質量が $M_0/2$ になったときの、ロケットの速さを求めよ。

問題 II

問 1 図 1 のような面積 S の導体板 A と導体板 B からなる平行導体板のコンデンサーを考える。平行板コンデンサーの間には、厚さ d_1 で誘電率 ε_1 と厚さ d_2 で誘電率 ε_2 の誘電体が図のように詰まっている。以下の問に答えよ。

1-1. この平行板コンデンサーの静電容量 C_e を求めよ。

1-2. 導体板 B に電圧 V_0 をかけ、導体板 A を接地するとき、コンデンサー内の電位を x の関数として求めよ。x 軸は図に示されたようにとること。

1-3. 次に導体板 A に電荷 $+Q$、導体板 B に電荷 $-Q$ を与えた場合を考える。そのとき境界面 C で働く静電力の大きさ F を求めたい。境界面 C をわずかに図のように δx だけ、仮想的にずらすことを考える。そのときの単位面積あたりのエネルギー変化を求めよ。

1-4. 前問の結果から、誘電体境界面に作用している静電力の大きさ F を求めよ。その力はどちら向きに働くか、誘電率の大きさを使って述べよ。

1-5. ここまでは誘電体を絶縁体と考えてきた。今、誘電率 ε_1 の誘電体が電気伝導率 σ_1 をもち、誘電率 ε_2 の誘電体が電気伝導率 σ_2 をもつときを考える。このとき、平行板コンデンサーの直流抵抗を求めよ。導体 A と導体 B の抵抗は無視して良い。

1-6. 前問の条件の下で、導体 A と導体 B に電位差 V（電位は導体 A の方が高電位）を与えると、電流が一様に流れる。定常状態のとき、境界面 C に蓄積される電荷の面電荷密度を求めよ。

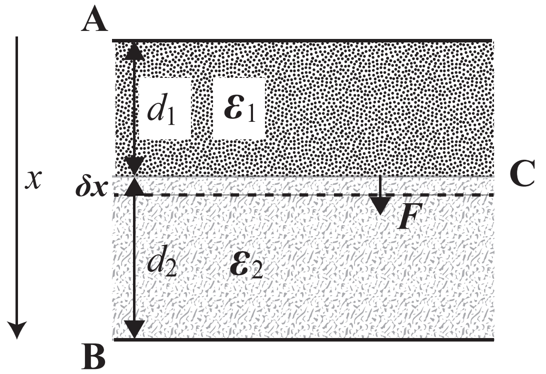

図 1

問 2 図 2 のような領域 V で表面が S で表される等方的な物質中での電磁場を考える。図中、dS は微小面積要素であり、$\vec{n}$ は dS の法線ベクトルである。物質の誘電率、透磁率、電気伝導率をそれぞれ ε、μ、σ とするとき、以下の Maxwell 方程式が成立する。以下の問に答えよ。

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho,\ \mathrm{div}\vec{B} = 0,\ \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{J} = \sigma\vec{E}$$

2-1. 次の電磁場に関するエネルギー保存則を導け。必要であれば､ベクトル公式 $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\vec{B}$ を使って良い。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right)dV + \int_V \vec{E}\cdot\vec{J}dV + \int_S \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot\vec{n}dS = 0$$

2-2. 前問において導出した式の各項の持っている意味を説明せよ。

2-3. 物質定数 ε、μ、σ が一定であり、電荷のない空間を自由空間と呼ぶ。自由空間で成立する電場と磁場の波動方程式を導け。

2-4. 前問で完全絶縁体の場合は $\sigma = 0$ である。そのときの電磁波の伝搬速度 v を求めよ。また、真空中の光速 c との比 c/v を求めよ。また、この比を何と呼ぶか書け。
但し、物質の比誘電率、比透磁率を ε_r、μ_r とする。

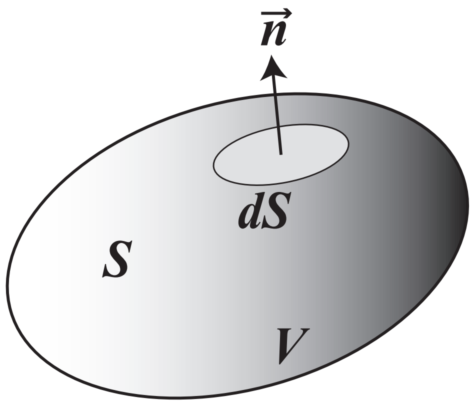

図 2