平成１８年度　(２月７日実施)

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題

受験に関する注意

・試験時間：　９：００～１２：００　の　３時間

・解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。

・解答の際、途中の問が解けないときも問題文に書かれている結果等を使って以降の問を解いてよい。

・試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。

・量子理学専攻志望者：問題Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳを選択すること。

・宇宙理学専攻志望者：

宇宙物理学・素粒子論・原子核理論
問題Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳを選択すること。

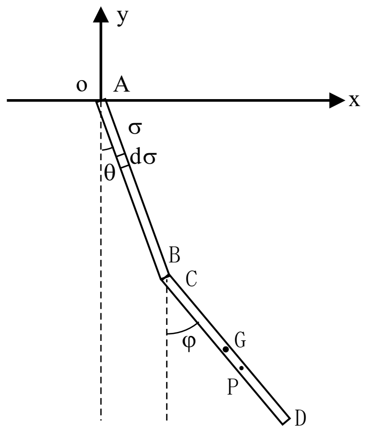
宇宙物質進化論・宇宙物理化学・惑星物理学・地球流体力学・気象学
問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵから任意の４問を選択すること。

・配布するものは

専門科目問題	Ⅰ	２枚
	Ⅱ	１枚
	Ⅲ	２枚
	Ⅳ	１枚
	Ⅴ	１枚
	Ⅵ	１枚
解答紙	Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ	６枚（各問題１枚ずつ）
草案紙	Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ	６枚（各問題１枚ずつ）

問題 I

問 1 質量 M、長さ a の一様な 2 本の棒 AB、CD が端 B と C で固定され、互いに自由に回転できるようになっており、さらに棒 AB は図のように一端 A で自由に回転できるように固定されている。この 2 本の棒を鉛直面内で振動させる。次の設問に答えなさい。鉛直方向と 2 本の棒のなす角をそれぞれ図のように $\theta(t)$、$\varphi(t)$ とする。また重力定数は g とせよ。



1-1. 棒 AB の運動エネルギー K_{AB} を考えよう。A 端からの距離が σ のところにある長さ $d\sigma$ の微小部分がもつ、点 A の回りの回転エネルギーを求め、これを σ について $0 \leq \sigma \leq a$ にわたって積分することにより、K_{AB} は θ の時間微分 $\dot{\theta}$ を使って

$$K_{AB} = \frac{1}{2}\ I\ \dot{\theta}^2 \tag{1}$$

の形に表せる。定数 I を求めよ。

1-2. 図のように点 A を原点として座標軸 x、y を考えると、棒 CD 上の点 P の座標 (x, y) は棒 CD の重心 G の位置座標 (x_G, y_G) を使って

$$x = x_G + \xi\ \sin\varphi, \qquad y = y_G - \xi\ \cos\varphi, \qquad (-\frac{a}{2} \leq \xi \leq \frac{a}{2}) \tag{2}$$

と表せる。棒 CD の運動エネルギー K_{CD} が、重心 G のまわりの回転エネルギー R_{CD} と重心 G の並進運動のエネルギー T_G によって $K_{CD} = R_{CD} + T_G$ と表せることを示し、R_{CD} が前問の I を使って

$$R_{CD} = \frac{1}{8}\ I\ \dot{\varphi}^2 \tag{3}$$

と書けることを示せ。

1-3. 棒 CD の重心 G の位置座標 (x_G, y_G) を θ、φ を使って表し、これから重心 G の並進運動のエネルギー T_G を θ、φ とその時間微分 $\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$ を使って表せ。

1-4. この力学系のラグランジアン L を θ、φ、$\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$ を使って表せ。

次に棒が微小振動する場合を考えよう。

1-5. 微小振動の場合はラグランジアン L において θ、φ と $\dot{\theta}$、$\dot{\varphi}$ の 3 次以上の項を小さいとして無視することができる。L をこのように近似した後、θ と φ に対するオイラー・ラグランジュの運動方程式を求めよ。

1-6. 前問の運動方程式の解は次の形に求めることができる。

$$
\begin{aligned}
\theta(t) &= \alpha \ \cos(\omega t + \delta), \\
\varphi(t) &= \beta \ \cos(\omega t + \delta)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

α、β、δ、ω は定数である。解が恒等的にゼロでないための条件を使って、基準振動数 ω の異なる値を 2 つ求めよ。

問題 II

図に示すように、真空中で無限に長い導線に電流 I_1 が流れている。導線と同じ平面内に長さ a、幅 b、1 周の抵抗が R である長方形の回路 ABCD が導線と平行に置かれている。回路の辺 CD と導線の距離は L である。このとき、次の問いに答えよ。ただし、真空の透磁率を μ_0 とする。

問 1 導線から距離 r における磁束密度の大きさ B を求めよ。ただし、回路 ABCD の影響はないものとする。

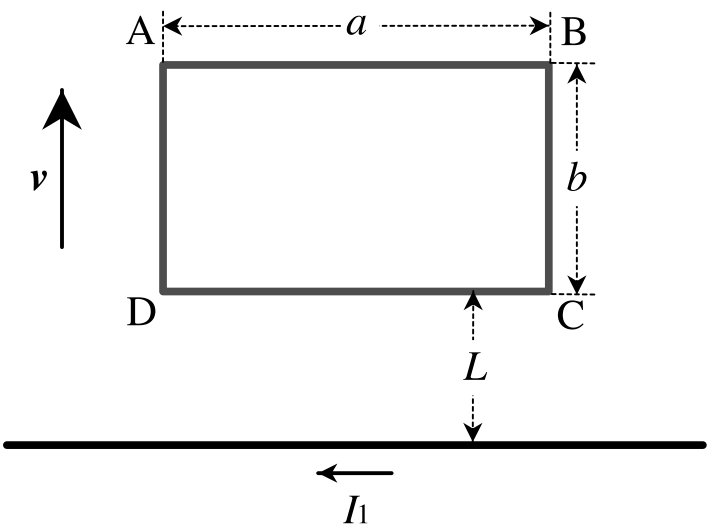
問 2 長方形の回路 ABCD に大きさ I_2 の電流を時計回りの方向に流した場合、回路に作用する合力を求めよ。

問 3 回路 ABCD を貫く磁束 Φ を求め、回路と導線との相互インダクタンス M を求めよ。

次に、回路 ABCD を同一平面内で導線から垂直方向に一定速度 v で遠ざける場合を考える。

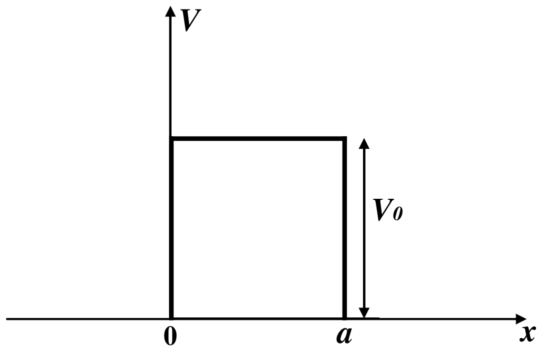
問 4 回路に生じる起電力および回路を等速で動かすのに必要な力を求めよ。

問 5 このときの仕事率をもとめ、この仕事率が回路に発生する単位時間当たりの熱エネルギーに等しいことを示せ。



問題 III

問 1 図のような障壁の高さが V_0 で、幅が a であるような 1 次元のポテンシャル障壁に左から入射するエネルギー $E\,(E > V_0)$ を持った質量 m の粒子を考える。



1-1. 障壁の外と中で場合分けして、それぞれの領域での粒子の波動関数を求めよ。但し波動関数の規格化はしなくてよい。

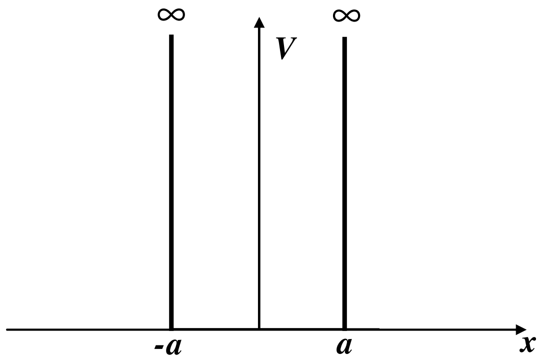
1-2. **1-1** で求めた波動関数の係数同士の関係を波動関数が $x = 0,\, a$ で滑らかにつながらなくてはいけないことから求め、行列を使って係数同士の関係を示せ。

1-3. 左からエネルギー $E\,(E > V_0)$ をもって入射する粒子の透過と反射を考える。

(a) この粒子の透過率 T と反射率 R を求めよ。

(b) $E > V_0$ の時、古典的には反射率は 0 であるが、量子論では一般に 0 とはならない。どのような E ならば反射率が 0 となるか求めよ。

問 2 図のような $x = \pm a$ で無限の大きさの障壁をもつ 1 次元井戸型ポテンシャル中での電子系の状態を考える。電子の質量は m とし、i 番目 $(i = 1, 2, \ldots)$ の電子の座標を x_i、その電子のスピンを s_i とする。またその電子の規格化されたスピン波動関数をアップスピンに対しては $\chi_{\uparrow}(i)$ とし、ダウンスピンに関しては、$\chi_{\downarrow}(i)$ とする。以下の問題では電子間クーロン力は無視する。



2-1. 1 個の電子をこのポテンシャルに入れた時に、この電子が取りうるエネルギー固有値とその波動関数の軌道部分を求めよ。但し波動関数は規格化して求めよ。

2-2. 次にこのポテンシャルに 2 個の電子を入れた時、基底状態が実現された。その基底状態のエネルギーとその波動関数をスピン部分を含めて求めよ。

問題 IV

問 1 ほとんど相互作用をしていない同種粒子からなる系が、絶対温度 T の熱源と化学ポテンシャル μ の粒子源に接している。1 粒子状態のエネルギー準位を ϵ_j $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ としたとき、この粒子が Fermi-Dirac (FD)、Bose-Einstein (BE) の各統計に従っている場合について、次の問に答えよ。以下では k_{B} は Boltzmann 定数を表すものとし、$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ とする。また、式中の複号は同順に上が FD 統計、下が BE 統計の場合を表す。

1-1. この系の大分配関数 $\mathit{\Xi}$ が次のように与えられることを示せ。

$$\mathit{\Xi} = \prod_{j=0}^{\infty}(1 \pm \mathrm{e}^{-\beta(\epsilon_j - \mu)})^{\pm 1}$$

1-2. エネルギー準位 ϵ_k にある平均の粒子数 $\bar{n}_k$ が次のように与えられることを示せ。

$$\bar{n}_k = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

1-3. 上の $\bar{n}_k$ を用いてこの系のグランドポテンシャル $J = -k_{\mathrm{B}}T \log \mathit{\Xi}$ を表せ。また、この系のエントロピー S が次のように与えられることを示せ。

$$S = k_{\mathrm{B}} \sum_{j=0}^{\infty} \{-\bar{n}_j \log \bar{n}_j \mp (1 \mp \bar{n}_j) \log(1 \mp \bar{n}_j)\}$$

問題 V

問 1 地球の気候システムの長期的な安定性について以下の語句を用いて説明せよ．

暗い太陽のパラドックス，地球化学的炭素循環，スノーボールアース，プレート運動

問 2 以下の用語から 3 つ選び，それぞれ 150 字程度で説明せよ．

(1) プレソーラー粒子	(2) 仮想地磁気極	(3) クレーター年代	(4) 消滅核種
(5) コンドリュール	(6) ダイナモ作用	(7) 微惑星	(8) ラグランジュ点

問題 VI

問 1 以下の問いに答えよ．解答には結果だけでなく，導出過程も記せ．

1-1. y を x の関数とする．次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' = -4y + \sin 3x.$$

1-2. xyz 空間のベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y-x)\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ の発散と回転を求めよ．ここで $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルを表す．

1-3. 次の条件を共に満たす複素数 z の範囲を複素平面上に図示せよ．

$$\mathrm{Re}(z^2) < 0, \ |z^{1/2}| \leq 2$$

1-4. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 2 事象 A はランダムに繰り返し起こり，微小時間 Δt の間に事象 A の起こる確率は $a\Delta t$ で表されるものとする．ここで a は正の定数である．以下の問いに答えよ．

2-1. 時間 Δt の間に事象 A が一度も起こらない確率を $a, \Delta t$ を用いて表せ．

2-2. n を自然数とする．時間 $n\Delta t$ の間に事象 A が一度も起こらない確率を $n, a, \Delta t$ を用いて表せ．

2-3. T を有限の時間幅とし $\Delta t = T/n$ と置く．このとき $n \to \infty$ としたときの前問 **2-2** の確率の極限値を a, T を用いて表せ．ここで公式 $\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x = e$ を用いて良い．

2-4. 事象 A の起こる時間間隔の平均値を a を用いて表せ．