（平成 20 年 2 月 5 日実施）

平成 20 年度 2 次募集

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程 入学試験　専門科目問題

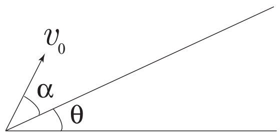
受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜12:00 の 3 時間
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II, III, IV** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	1 枚
	問題 II	2 枚
	問題 III	2 枚
	問題 IV	2 枚
解答紙		8 枚（各問題 2 枚）
草案紙		4 枚（各問題 1 枚）

問題 I

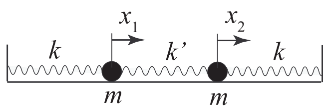
問 1 物体を、水平面と角度 θ をなす斜面に向けて、斜面に対して α の角度と初速 v_0 で投げ上げる (下図参照)。ただし、$\alpha + \theta < \pi/2$ であり、また、空気抵抗の影響は無視できるものとする。重力加速度を g として以下の問いに答えよ。



1-1. 斜面に再び落ちるまでの時間 T と斜面に沿った到達距離 X を求めよ。

1-2. 到達距離を最大にするための角度 α はいくらか？

問 2 同じ質量 m を持つ二つの質点 1 と 2 が、それぞれ左右の壁にばね定数 k のばねで水平に結ばれ、また、互いにばね定数 k' のばねでつながれている (下図参照)。それらの静止位置からの右方向への変位をそれぞれ x_1 と x_2 とする。質点と床との間に摩擦はないものとして、以下の問いに答えよ。



2-1. この質点系のラグランジアン L を書き下せ。

2-2. ラグランジュの運動方程式を求めよ。

2-3. 基準振動の角振動数を求めよ。

2-4. 振動の一般解を求めよ。

2-5. 時刻 $t = 0$ における質点 1 の変位と初速度がそれぞれ $x_1 = a$ および $\dot{x}_1 = 0$、質点 2 の変位と初速度がそれぞれ $x_2 = 0,\ \dot{x}_2 = 0$ であった。時刻 $t > 0$ における $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の具体形を求めよ。

2-6. 前問において $k' \ll k$ が成立する場合の $x_1(t)$ の概形を描け。

問題 II

問 1 導体及び導体系における以下の設問に答えよ。

1-1. １つの導体に電荷を与えた場合、導体内部の静電場の大きさがいくらになるかを自由電子の観点から説明せよ。

1-2. 図１のように、真空中で、同じ形状の３枚の金属円板 A、B、C（すべて厚みのある導体）を互いに中心を揃えて平行に対向させ、A、C にそれぞれ $+Q$ と $-Q$ の電荷を与える。このとき、ガウスの法則を用いて、定常状態における A、B、C 円板上の電荷分布の様子について説明し、電気力線の様子を図示せよ。なお、金属円板の端の効果は無視でき、静電場は金属円板の上下底面に垂直であるとする。

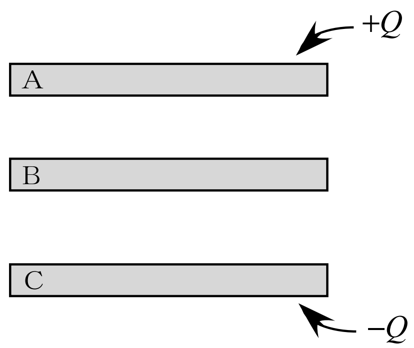


図１

問 2　図 2 のように、場所に依るが時間には依らない磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$（$\boldsymbol{x}$ は位置ベクトル）の中でループ状の細い導線 Γ を等速度 $\boldsymbol{v}$ で移動させる場合を考える。Γ には起電力 ϕ が発生する。

2-1. Γ 内の位置 $\boldsymbol{x}$ に在る 1 個の電子（電荷 $-e$）が受けるローレンツ力 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ はいくらか。また、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が Γ 内に仮想的に考えた電場による力であるとするとき、この仮想電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ を求めよ。

2-2. 図 2 のように Γ に沿う微小な線素ベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ とする。$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ の向きを ϕ の正の向きとしたときに、ϕ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ の関係を求めよ。また、設問 **2-1.** の結果から、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ を含まない形で、ϕ を表せ。

2-3. 仮想電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ に対して、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\,\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{x})$ なる静電ポテンシャル（静電位）$\psi(\boldsymbol{x})$ を定義できるか否か、理由を付して答えよ。

2-4. 微小時間 Δt の間に、Γ が図 2 において Γ' として描いてあるループ導線の位置へと等速度 $\boldsymbol{v}$ で平行移動したとする。このとき Γ と Γ' を底面とする斜めに傾いた円柱を考え、その全表面を閉曲面 S とし、またその体積を V とする。S を貫く磁束の総量を求めよ。そして、Γ' を貫く磁束 $\Phi_{\Gamma'}$ と Γ を貫く磁束 Φ_{Γ} の差 $\Delta\Phi = \Phi_{\Gamma'} - \Phi_{\Gamma}$ を、円柱の側面を貫く磁束に着目して求めよ。

2-5. 設問 **2-2.** と **2-4.** の結果を用いて、$\phi = -\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ となることを示せ。

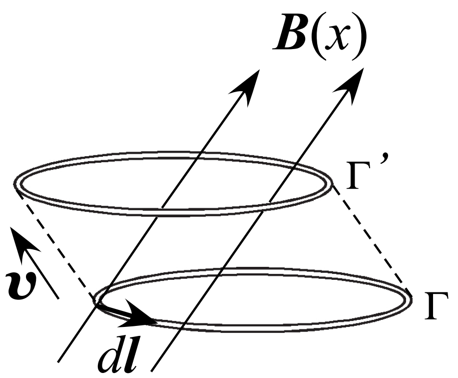


図 2

問題 III

問 1 エントロピーの変化について以下の問に答えよ。ボルツマン定数は k とする。

1-1. 分子数 N、定積熱容量 C_V の理想気体がある。この理想気体の温度 T と体積 V を微小量 dT、dV だけ準静的に変化させた。この場合に、熱力学第一法則と系のエントロピーの微小変化の定義を用いて、系が得る熱と系のエントロピー変化 dS を求めよ。ただし、C_V は定数とする。

1-2. 前問の結果を用いて、系のエントロピー S を T、V、N の関数として表せ。ただし、温度 T_0、体積 V_0 におけるエントロピーを $S_0(N)$ とする。

1-3. 図 1 にあるように、分子数 N、温度 T_1、体積 V、定積熱容量 C_V の理想気体と温度のみ異なる同種の理想気体 (温度 T_2) を混合し、最終的に温度が T_f となった。このときのエントロピーの変化を求めよ。(前問で定義した関数 $S_0(N)$ を用いてもよい。)

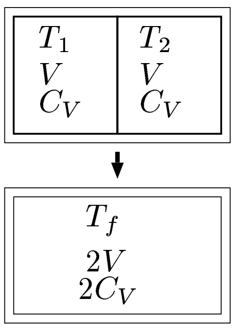


図 1

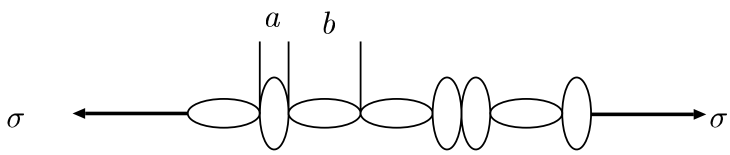


図 2

問 2 図 2 のように、独立に上下、または左右を向く N 個の分子が直線上に並んだ鎖状分子がある。個々の分子は上下、左右を向く場合にそれぞれ、エネルギー 0、ε ($\varepsilon > 0$) をとり、鎖状分子軸方向の長さはそれぞれの状態で a、b ($a < b$) とする。張力 σ、温度 T における分配関数は、

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i - \sigma L_i}{kT}\right)$$

と表せる。ここで、E_i、L_i はそれぞれ、鎖状分子全体の状態 i におけるエネルギーと長さを表し、$\sum_i$ は全ての状態についての和を示す。また k はボルツマン定数である。

2-1. 分子が独立に向きを変えられることから、系全体の状態についての和は一分子ごとの状態和の積で表せる。系の分配関数 Z を求めよ。

2-2. 分配関数の意味を考えると、鎖状分子の長さの平均値 $\overline{L}$ は状態についての和を用いて表すことができる。

$$\overline{L} = \sum_i \boxed{\text{(A)}} \ \Big/ \ \sum_i \boxed{\text{(B)}}$$

上記の $\boxed{\text{(A)}}$、$\boxed{\text{(B)}}$ を埋めよ。さらに、$\overline{L}$ を分配関数 Z の微分を用いて表せ。

2-3. $\overline{L}$ を張力 σ と温度 T の関数として求めよ。

2-4. 張力が $\sigma = 0$ の場合と、$(b-a)\sigma > \varepsilon$ の条件を満たす場合について、$T = 0$、∞ における鎖状分子の平均の長さ $\overline{L}$ を求めよ。理由を述べて計算無しで答えてもよい。

問題IV

問 1 $x = 0$ と $x = L$ の位置に壁がある。これらの間を質量 m の粒子が一次元的に自由に動くことができる。この粒子に対するポテンシャルは、

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < L) \\ \infty & (x < 0) \text{ または } (x > L) \end{cases}$$

である。

図 1: 0 から L の間に束縛する井戸型ポテンシャル

1-1. この粒子に対するシュレーディンガー方程式を書きなさい。

1-2. エネルギー固有値と規格化された波動関数をすべて求めなさい。

1-3. 位置 x に対して、期待値 $< x >$ をすべてのエネルギー固有状態について求めなさい。

1-4. 運動量 p に対して、期待値 $< p >$ および $< p^2 >$ をすべてのエネルギー固有状態について求めなさい。

1-5. この粒子が基底状態にあるとき、粒子が壁を押す力を仕事とエネルギーの観点より求めなさい。

1-6. ポテンシャル $V_0(x)$ に g を定数として

$$V_1(x) = g\,x$$

という摂動が加わった。このとき、基底状態のエネルギーに対する補正を g についての一次の摂動の範囲で求めなさい。

1-7. この粒子のスピンは１／２であるとする。２つの粒子が基底状態にあり、それぞれの粒子に作用するポテンシャル $V_0(x)$ に加えて、２つの粒子間にはポテンシャル

$$V_2(x_1, x_2) = U_0\delta(x_1 - x_2)$$

で与えられる反発力が働くものとする。ただし x_1, x_2 は２つの粒子の位置である。２粒子状態の基底状態のエネルギーに対する補正を、U_0 についての摂動の一次の近似で求めなさい。

問２ $k = |\boldsymbol{k}|$ とするとき、積分方程式

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}U(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')d^3r'$$

の解が、方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$$

を満たすことを示しなさい。