（平成 24 年 8 月 9 日実施）

平成 **25** 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも問題 **I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 質量 m の質点がその速度 $\boldsymbol{v}$ に比例する抵抗力 $-\alpha\boldsymbol{v}$（α は正の定数）を受けながら中心力場 $f(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$（$\boldsymbol{r}$ は質点の位置ベクトル）の中を運動している。角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ が時刻 $t=0$ で $\boldsymbol{L}_0$ であったとするとき、時刻 t での角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}(t)$ を求めよ。

問 2 長さ l の質量の無視できる棒の一端に質量 m の質点を取り付け、他端を支点とする振動を考える。図 1 のようにデカルト座標系 xy を取り、重力（重力加速度 g）の方向を $-y$ 方向とし、この系の振動は x-y 面内に限られるとする。支点の位置が時間 t によって変動する場合を考え、支点の位置を $(x,y)=(x_0(t),0)$ とする。以下では、$x_0(t)=a\sin\omega_0 t$（a,ω_0 は定数）である場合について答えよ。

2-1. $-y$ 方向から測った棒の角度 θ を一般化座標として、この系のラグランジアンを求め、ラグランジュの運動方程式を導け。

2-2. 上の運動方程式を、θ が微小振動をする場合について解き、共鳴条件に注意して θ の一般解を求めよ。

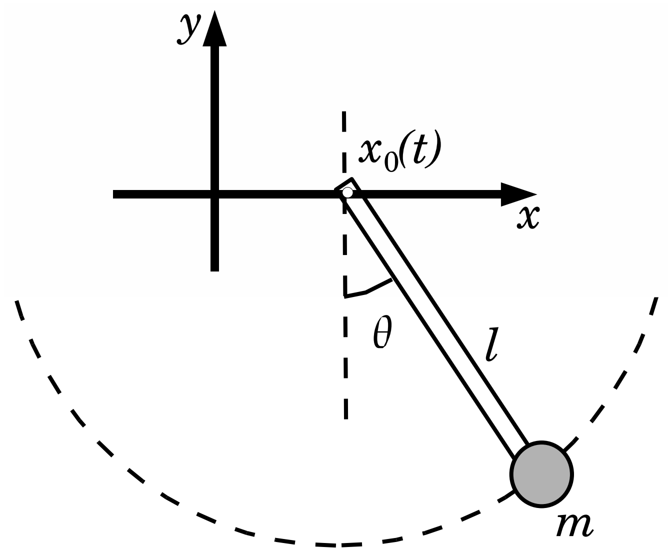


図 1

問 3 任意の形をした物体（中空領域は持たないとする）を、密度 ρ の非圧縮静止液体の中に完全に沈めた（図２）。液面から深さ z での圧力は $p(z) = \rho g z + p_0$（g は重力加速度、p_0 は定数）で表され、物体表面には表面に垂直内向きに単位面積あたり p の力がかかる。このとき、物体表面にかかる圧力の総和は、大きさ $\rho g v$（v は物体の体積）の浮力を与えることを示せ。必要なら、閉曲面 S、S が囲む領域 V およびスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対し、ガウスの定理の１つの形として、

$$\int_S \phi \, d\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla}\phi \, dV$$

が成立することを使ってよい。

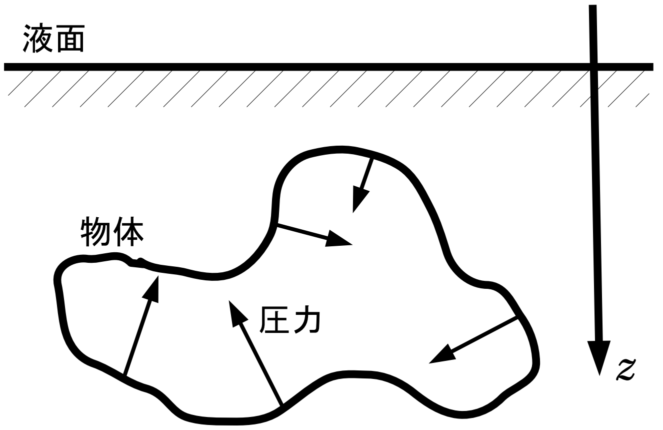
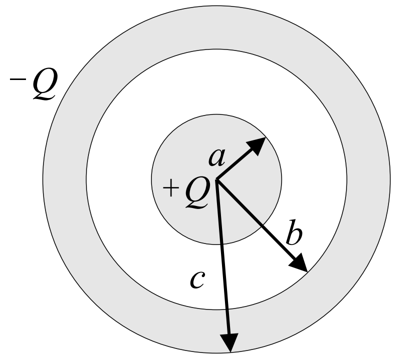


図２

問題 II

問 1 図のように、半径 a の導体球と、内半径 b、外半径 c の導体球殻が同心上に配置された球形コンデンサを考える。導体球には $+Q$、導体殻には $-Q$ の電荷が与えられており、$a < b < c$ である。真空の誘電率を ε_0 として以下の設問に答えよ。



1-1. 導体球と導体球殻中で、それぞれ電荷がどのように分布しているか、理由を示して答えよ。

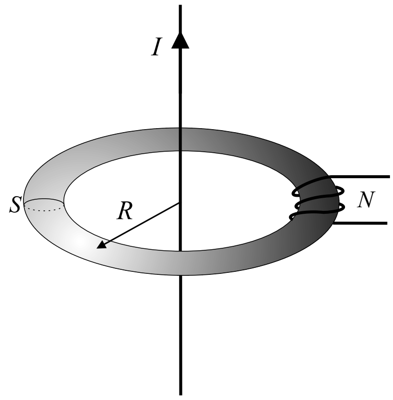
1-2. ガウスの定理を用いて、中心から任意の距離 r での電場の大きさ E を r の関数として求め、その概形をグラフに表せ。

1-3. 球と球殻間の電位差 V を計算し、この２つの導体で作られるコンデンサーの静電容量 C を求めよ。

1-4. 球殻の内側表面は電場の影響で動径方向に力を受けている。内半径 b を仮想的に Δb だけ変位させたときのコンデンサーのエネルギーの変化を調べることにより単位面積あたりに作用する力の大きさとその方向を求めよ。

1-5. 真空中の静電場のエネルギー密度は、$\varepsilon_0 E^2/2$ で与えられる。球殻の内側表面における、エネルギー密度と前問の結果を比較して考察せよ。

問 2 図のように、無限に長い直線導体に電流 I が流れており、この導体を中心として半径 R、断面積 S のドーナッツ状の磁性体が配置されている。磁性体には導線が N 回巻きつけられており磁性体の内部では磁束密度は一様であるものとする。磁性体の透磁率を μ として以下の設問に答えよ。



2-1. アンペールの法則を用いて、磁性体内部の磁束密度の大きさ B を求めよ。

2-2. 巻き線を貫く全磁束 Φ を求めよ。

2-3. 次に直線導体に流れる電流を $I = I_0 \cos \omega t$ としたときに、巻き線に発生する起電力 V を求めよ。

2-4. 巻き線に負荷抵抗 r を接続すると電流 i が流れジュール熱が生じる。この熱に相当する仕事が直線導体を流れる電流 I からどのようにして生成されるかを考察せよ。

問 3 電磁場の状態は以下のマクスウェル方程式により記述される。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho、\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0、\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}、\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

ここに、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ は、それぞれ、電束密度、磁束密度、電場、磁場を、また、ρ と $\boldsymbol{j}$ は、電荷密度と電流密度を表す。特に真空中では、真空の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 を用いて $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ の関係が成り立つ。以下の設問に答えよ。

3-1. 一般的に以下の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \mathrm{rot}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} - \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{E}$$

3-2. 電磁場のエネルギー密度 $u = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2/2 + \mu_0 \boldsymbol{H}^2/2$ の時間に関する偏微分を計算し、ポインティングベクトル $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ を用いて表せ。

3-3. 前式を空間 V の領域で体積積分し、内部の電磁場のエネルギー U の時間微分を計算し、エネルギーの保存について論ぜよ。

電磁場のエネルギーは、電磁波として電荷、電流密度のない空間を伝搬する。

3-4. マクスウェル方程式を用いて電磁波の速度 c を求めよ。

3-5. 電磁波が、単一周波数で特定の方向に伝搬する平面波のとき、電場のエネルギー密度 $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2/2$ と磁場のエネルギー密度 $\mu_0 \boldsymbol{H}^2/2$ の大きさの比率を求めよ。