（平成 20 年 8 月 20 日実施）

平成21年度

北海道大学大学院理学院 量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午前）

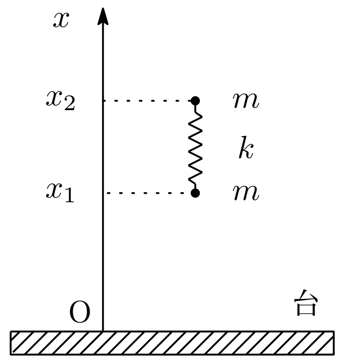
受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題I, II**を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題I	2枚
	問題II	2枚
解答紙	問題I, II	4枚（各問題2枚）
草案紙	問題I, II	2枚（各問題1枚）

問題 I

問 1 右図のように大きさが無視できる質量 m の 2 個の物体が、自然長 l、ばね定数 k のばねでつながれている。なお、ばねの質量は無視できるものとして扱ってよい。2 個の物体は鉛直線上に並んでおり、以下ではこれらの物体が行う鉛直線上の運動だけを考える。図に示すように台の上面を $x = 0$ として鉛直上向きに x 軸を取り、下方の物体 1 の座標を x_1、上方の物体 2 の座標を x_2 と表す。また、重力加速度の大きさは g で表す。



1-1. この系の運動エネルギーと重力および、ばねのポテンシャルエネルギーを求めよ。また、この結果を用いて、この系のラグランジアン L を $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ を用いて表せ。但し、$\dot{x}_1$ などのドットは時間微分を表す。また、重力のポテンシャルの基準点は $x = 0$ に取る。

1-2. 2 個の物体の重心座標 $Q = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ および、相対座標を用いてばねの伸びを表す変数 $q = x_2 - x_1 - l$ を導入する。ラグランジアン L を $Q, q, \dot{Q}, \dot{q}$ を用いて表せ。なお、以下の問題を解く上で便利と考えるならば、全質量 $M = 2m$ および換算質量 $\mu = \frac{m}{2}$ の記号を使用しても構わない。

1-3. Q および q についてのオイラー・ラグランジュの運動方程式を求めよ。

1-4. 上方の物体 2 は $x_2 = h$ の位置に固定され、物体 1 はつりあいの位置に静止している。このときの x_1 の値を求めよ。また、時刻 $t = 0$ に物体 2 を離した後、物体 1 が台と衝突する前の時刻 t におけるそれぞれの物体の位置 $x_1(t)$ および $x_2(t)$ を求めよ。

1-5. x_1、x_2 に共役な運動量 p_1、p_2 と Q、q に共役な運動量 P、p を求めよ。また、この結果を用いて、P、p を p_1、p_2 で表せ。

1-6. 正準変数として Q, q, P, p を用いてこの系のハミルトニアン H を表せ。

1-7. ハミルトンの運動方程式を用いると、一般に $2N$ 個の正準変数 q_i, p_i $(i = 1〜N)$ の関数 $f(q_i, p_i)$ の時間変化は、系のハミルトニアン $H(q_i, p_i)$ とのポアソンの括弧式により次のように表されることが示される。

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

この関係式と、**1-6** のハミルトニアンが $H(Q, q, P, p) = H_Q(Q, P) + H_q(q, p)$ のように重心運動のハミルトニアン H_Q と相対運動のハミルトニアン H_q の和の形に表されることを用いて、H_Q と H_q が保存量であることを示せ。

1-8. **1-4** で $t = 0$ に落下し始めた系について考える。その後、ばねが縮んだ状態から自然長に戻った瞬間に物体 1 は台と弾性的に衝突した。(衝突は瞬間的に完了し、系の力学的エネルギーの損失はない。) 物体 1 との衝突までは台は固定されているが、衝突直後に台を横にずらしたため、物体と台が再び衝突することはないとしてよい。このとき、衝突後の運動における重心座標の最大値を求めよ。

問 2 一定の深さ h の水の波動現象を考える。簡単のため 1 次元の波（平面波）を扱うこととし、波が伝わる水平方向に x 軸を取る。また、鉛直上方に z 軸を取り、水底の座標を $z = -h$ とし、水が静止状態にあるときの水面の座標を $z = 0$ とする。

2-1. 時刻 t、位置 (x, z) における水の速度を $(v_x(x, z, t), v_z(x, z, t))$ と表す。水の密度 ρ は一定とみなし、水中の微小な領域を考えると水の流入流出に関わらず水の量が変化しないことに注目して、次の連続の方程式を導け。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

2-2. 水の速度 (v_x, v_z) が関数 $\phi(x, z, t)$ を用いて $v_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial x},\ v_z = \dfrac{\partial \phi}{\partial z}$ と表されるような流れ（渦なし流）では、(1) 式はラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

で表される。水底における境界条件は

$$v_z(x, z = -h, t) = 0 \tag{3}$$

で与えられ、水面における境界条件は、微小な波動現象の場合には

$$g\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z = 0, t) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, z = 0, t) = 0 \tag{4}$$

で近似できる。ここで g は重力加速度の大きさを表す。ϕ に対して

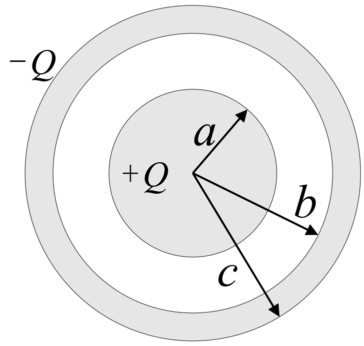
$$\phi(x, z, t) = f(z)\sin(\omega t - kx)$$

の変数分離形の解を仮定し、波数 $k\,(> 0)$ の波が生じる場合の $\phi(x, z, t)$ を求めよ。

2-3. **2-2** の特別な場合として深水波（$h \to \infty$）および浅水波 $(kh \ll 1)$ の位相速度を求めよ。

問題 II

問 1 図のように、真空中に半径 a の導体球と、内半径 b、外半径 c の導体球殻が同心状に配置されている。ただし、$a < b < c$ である。中心からの距離を r、真空の誘電率を ϵ_0 として以下の設問に答えよ。



1-1. 一般に、導体表面上で静電場は、その表面に垂直な方向を向いている。この理由を簡単に説明せよ。

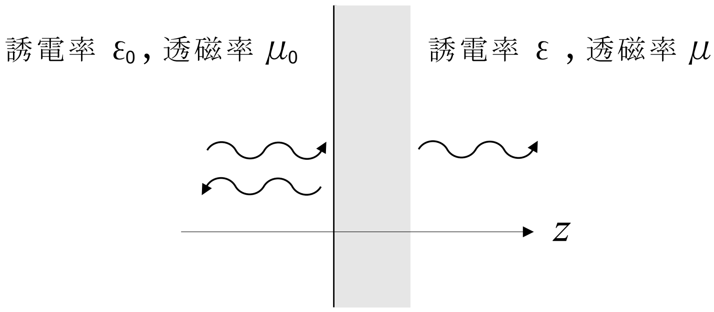
1-2. 導体球に $+Q$、球殻に $-Q$ の電荷を与えたとき、r における電場の大きさ $E(r)$ を求め、それをグラフに示せ。

1-3. この２つの導体で作られるコンデンサーの静電容量 C を求めよ。

1-4. 静電容量 C のコンデンサーの導体間で、電荷を徐々に移動させ、それぞれの電荷が 0 の状態から、$+Q$ と $-Q$ の状態まで変化させた。電場に逆らって電荷を移動させるのに必要な仕事を計算し、それを C と Q を用いて表しなさい。

1-5. 真空中における静電場のエネルギー密度は $\epsilon_0 E^2/2$ で与えられる。**1-2** で与えられる電場を用いて静電場の全エネルギーを求めよ。また、この静電場のエネルギーが、**1-4** で得られる仕事に一致することを **1-3** の結果を用いて示しなさい。

問 2 図のように、無限に広い平面 $z=0$ で真空（誘電率 ϵ_0、透磁率 μ_0）と境を接する半無限の誘電体（誘電率 ϵ、透磁率 μ）に垂直に平面電磁波が入射する。この平面電磁波の電場は x 方向を向いているものとする。電荷密度と電流密度が存在しないとき、電場 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁場 $\boldsymbol{H}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の間には、マクスウェル方程式、$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0$、$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0$、$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$、$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ が成り立つ。以下の設問に答えよ。



2-1. 電場 $\boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ で表されるとき、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}{\omega}$$

と表されることを示しなさい。ここに、$\boldsymbol{k}$ と ω は、電磁波の波数ベクトルと角振動数である。

2-2. 電束密度と磁束密度の時間微分、$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$、$\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ が有限であることを用い、境界面の両側で、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ が連続であることを示しなさい。

2-3. 物質中で電場の x 成分 E_x に成り立つ波動方程式を ϵ と μ を用いて表すとともに、そのときの電磁波の速さ v を求めなさい。

2-4. 入射波、透過波、反射波それぞれの電場成分の振幅を E_0、E_{T}、E_{R} とおいたとき、**2-2** の結果を用いて、これらの間に成り立つ２つの関係式を求めなさい。

2-5. 電磁場の境界面における電場の反射率 E_{R}/E_0 を ϵ_0、μ_0、ϵ、μ を用いて表しなさい。また、$\epsilon=9\epsilon_0$、$\mu=\mu_0$ のときの反射率を求めよ。

2-6. $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ で定義されるポインティングベクトルを考える。境界面における入射波、透過波、反射波それぞれのポインティングベクトル $\boldsymbol{S}_0$、$\boldsymbol{S}_{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{S}_{\mathrm{R}}$ を E_0 を用いて表し、それらの間に成り立つ関係式を求めなさい。