（平成 26 年 8 月 6 日実施）

平成 **27** 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも問題 **I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	3 枚
	問題 II	3 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 図 1 のように，弾力定数 k と自然長 ℓ を持つバネの終端に，質量 m と半径 a を持つ球形のおもりが，その中心とバネの終端が一致するように吊り下げられている。おもりの運動は鉛直軸方向にのみ行われ，その際，おもりは常に粘性率 η の液体に浸かっているが，バネには粘性が働かないものとする。バネの上端を原点として鉛直下向きに座標軸をとり，おもりの中心位置座標を x として，おもりの運動を考察しよう。おもりへの浮力は無視でき，また，おもりにはストークスの法則に従う粘性抵抗が働くものとする。ここで「ストークスの法則」とは，「速度 $\vec{v}$ で粘性率 η の液体中を運動する半径 a の球体には，$-6\pi a\eta\vec{v}$ の力が働く」という法則である。重力加速度を g として，以下の問に答えよ。

1-1. 時刻 t におけるおもりの運動方程式を書き下せ。簡略化のため，$6\pi a\eta \to 2\gamma m$ と置き換えてもよい。$(\gamma \equiv 3\pi a\eta/m)$

1-2. バネの釣り合いの位置 x_0 の表式を求めよ。

1-3. おもりの運動が減衰を伴った振動になる条件を求め，その場合の一般解 $x(t)$ の表式を求めよ。

1-4. この現象を用いて液体の粘性率を求めるとき，何を観測するのが良いか？理由を合わせて説明せよ。

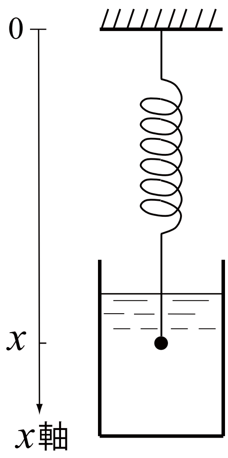

図 1

問 2 ギターや三味線などの弦を伝わる横波について考える。弦を張る方向を x，弦に垂直な方向を y とし，弦の変位は微小で y 方向のみに限られるとする。弦の線密度を σ，弦に働く張力を T とし，重力など外力の影響は考えない。以下の問に答えよ。

2-1. 図 2 の曲線は，ある時刻 t における弦の変位 $y = y(x, t)$ を描いたものである。弦の微小区間 PQ に働く y 方向の力 F が，PQ 間の x 座標の差 δx の一次の範囲で，$F = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x$ と表せることを示せ。ただし，y 方向の変位は微小であり，点 P と点 Q において弦が x 軸となす角 θ_{P} および θ_{Q} は，$|\theta_{\mathrm{P}}|, |\theta_{\mathrm{Q}}| \ll 1$ を満たすものとする。

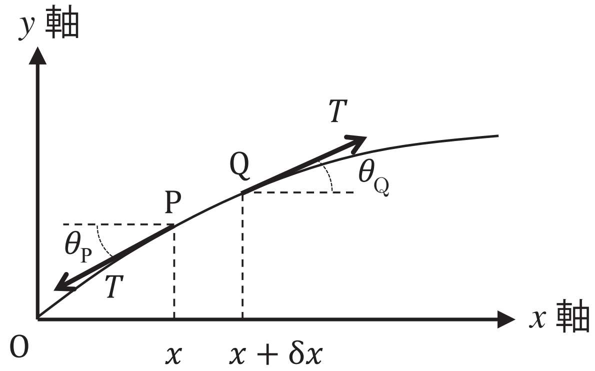

図 2

2-2. 区間 PQ の y 方向の運動方程式を考察することにより，$y(x, t)$ が満たす波動方程式を導出せよ。

2-3. 長さ L の両端を固定した弦では，$y(x, t) = X(x)\cos(\omega t + \theta_0)$ (ω と θ_0 は定数) の形の「定在波」が波動方程式の解となる。この関数形を用いて，弦の固有角振動数 ω の表式を求めよ。

問 3 質量 m_1 と m_2 を持つ２つの質点 P_1 と P_2 が，それらの相対距離 $r \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ のみに依存するポテンシャル $U(r)$ で相互作用しながら運動している。外力は無いものとする。２つの質点の相対運動に関する以下の問に答えよ。

3-1. 位置ベクトル $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ の時間変化を記述する方程式が，換算質量 $m \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を用いて，

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}U(r)$$

と書けることを示せ。ただし，$\vec{\nabla} \equiv \partial/\partial\vec{r}$ である。

3-2. $\vec{r}$ に垂直方向の運動が等速運動となることを示せ。

3-3. 運動方程式を用いて，軌道角運動量 $\vec{L} \equiv m\vec{r} \times \vec{v}$ が保存すること，すなわち，$\vec{L}$ が時間変化しないことを示せ。ただし，$\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$。

3-4. 運動方程式を用いて，全エネルギー $E \equiv \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(r)$ が保存することを示せ。

3-5. 運動は同一平面内で起きるものとすると，位置ベクトル $\vec{r}$ は，二次元極座標を用いて，$\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ と表せる。この場合について，動径速度 $\dot{r} \equiv dr/dt$ と角速度 $\dot{\varphi} \equiv d\varphi/dt$ を，**3-3** と **3-4** で見いだした二つの保存量 $L \equiv |\vec{L}|$ と E，および，r と φ を用いて表せ。

3-6. ポテンシャルが，

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha \text{ は正定数})$$

で与えられる場合について，**3-5** の結果から $dr/d\varphi$ の表式を求めよ。その微分方程式を，$E + \alpha^2/2mL^2 > 0$ の条件下で解き，運動の軌跡 $r(\varphi)$ が，三つの積分定数 n，ϵ，φ_0 を用いて，

$$\frac{n}{r} = 1 + \epsilon\cos(\varphi + \varphi_0)$$

と表せることを示せ。さらに，定数 n と ϵ を，L と E の関数として表せ。（ヒント：$r = 1/x$ の変数変換を行うと便利である。）

問題 II

問 1 図 1 のように，真空中に 2 つの薄い球形導体が，中心を共有して置かれている。内側の球 A の半径を a，外側の球 B の半径を b とする。真空の誘電率を ε_0 として，以下の問に答えよ。

1-1. 球形導体 A に電荷 Q を与え，球形導体 B を接地する。十分な時間がたったのち，中心からの距離 r の関数として，$r < a$，$a \leq r \leq b$，$b < r$ の領域における電場の強さ $E(r)$ と電位 $\phi(r)$ を求め，$E(r)$ および $\phi(r)$ をグラフに描け。

1-2. 図 1 の 2 つの導体は，同心球コンデンサーとみなせる。この同心球コンデンサーの電気容量 C を求めよ。また，初期に帯電していなかった球形導体 A に電荷 Q を蓄える際に必要な仕事 W を求めよ。

1-3. 前問で考察した「 球形導体 A に電荷 Q を蓄える際の仕事 W」が，終状態における球形導体 A，B 間の電場のエネルギー U に等しいことを証明せよ。

1-4. 次に，球形導体 A，B 間を，電気伝導率 σ の導体で満たしたとする。 球形導体 A，B 間の電気抵抗 R を求めよ。ただし，球形導体 A，B の抵抗は無視できるものとする。

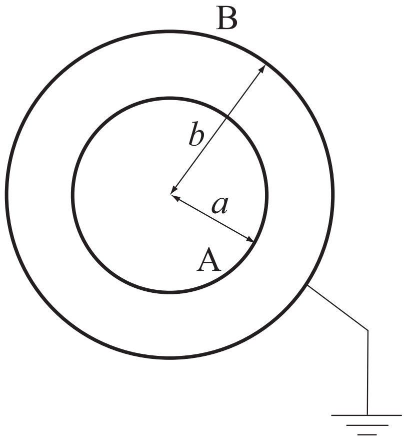

図 1

問 2 電流がつくる磁束とインダクタンスについて考える。真空の透磁率を μ_0 として，以下の問に答えよ。

2-1. 図 2(a) に示すように，真空中に，半径 R の円柱形をした無限に長い直線状の導線 A があり，その断面に電流 I が一様に流れている。中心軸から垂直方向の距離 r の関数として，$r < R$，$R \leq r$ の領域における磁束密度の大きさ $B(r)$ を求めよ。

2-2. 図 2(b) に示すように，一片の長さ a の正三角形の回路 CDE を，導線 A の中心軸と同

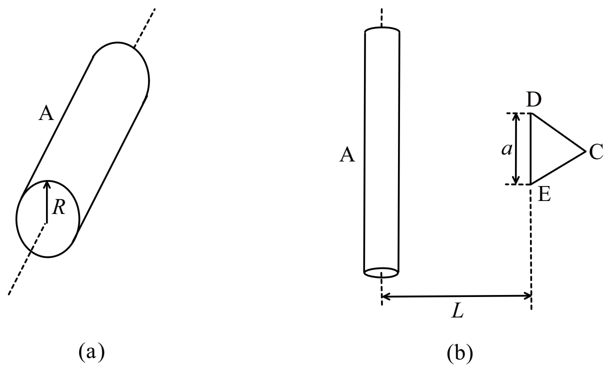

図 2

じ平面内に，辺 DE を導線と平行にして配置した。辺 DE と導線 A の中心軸との距離は L $(> R)$ であり，回路 CDE の導線の太さは無視できるものとする。回路 CDE を貫く磁束 Φ を求め，回路 CDE と導線 A との相互インダクタンス M を求めよ。

2-3. 図 2(b) の配置において，導線 A に流れる電流が，$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$ に従って変化した場合を考える。時刻 t において回路 CDE に誘導される起電力 $\phi(t)$ を，相互インダクタンス M を用いて表せ。

2-4. 図 3(a) のように，真空中において，原点 O を中心とする半径 a の円形の導線が，z 軸に垂直に配置されている。導線には，定常電流 I が，図の矢印の向きに流れている。この時，z 軸上の点 $\mathrm{P}(0,0,z)$ における磁束密度の大きさは，$B = \dfrac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$ となることを示せ。ただし，ビオ・サバールの法則によると，導線に電流 I が流れているとき，導線上の微小な電流素片 $Id\vec{l}$ からベクトル $\vec{r}$ だけ離れた点に生じる磁束密度は，$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ と表せる。

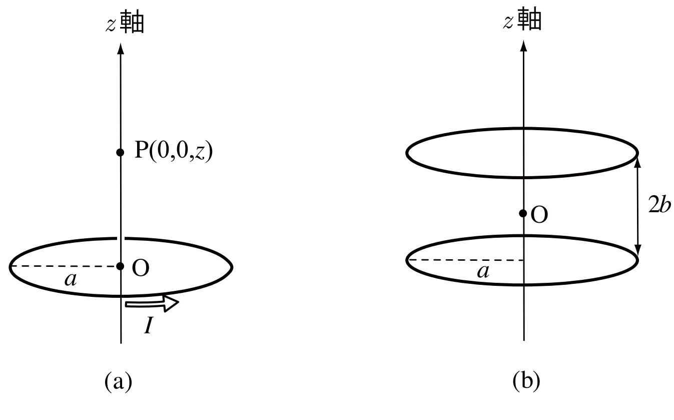

図 3

2-5. 次に，図 3(b) のように，半径 a の二つの円形導線を，z 軸上の $\pm b$ の点を中心にして z 軸に垂直に配置し，同一方向に大きさ I の定常電流を流した。原点 O から距離 z だけ離れた z 軸上の点における磁束密度の大きさを求めよ。

2-6. **2-5** で得られた磁束密度の表式を z に関してテイラー展開せよ。次に，その表式を用いて，原点付近での磁束密度が z^2 のオーダーまで考慮しても定数と見なせるための a と b の関係式を求めよ。また，その時の原点 O における磁束密度の大きさを書き下せ。

問 3 真空中における電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ は，マクスウェル方程式

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

に従う。 ここで，ε_0 と μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。静電磁場はないものとして，次の問に答えよ。

3-1. ベクトル解析の恒等式 $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ を念頭に，電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ が満たす波動方程式を求め，電磁波の速さ c の表式を求めよ。

3-2. 以下では, 電磁場が z と t のみに依存する場合, すなわち, $\vec{E}=\vec{E}(z,t)$ および $\vec{B}=\vec{B}(z,t)$ と表される場合を考える。それらの z 成分が定数であること，すなわち次式を示せ。

$$\frac{\partial E_z(z,t)}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t}=0$$

3-3. 以下では電磁波の電場の x 成分と y 成分が，それぞれ $E_x(z,t)=f(z-ct)$ および $E_y(z,t)=g(z-ct)$ で与えられる場合を考える。この時，磁束密度 $\vec{B}$ の x 成分 B_x と y 成分 B_y を，E_x，E_y，ε_0，μ_0 を用いて表せ。また，$\vec{E}$ と $\vec{B}$ が直交することを示せ。

3-4. **3-3** の場合について，ポインティング・ベクトル $\vec{S}\equiv\vec{E}\times\vec{B}/\mu_0$ と電磁波のエネルギー密度 u を求めよ。そして，ポインティング・ベクトル $\vec{S}$ が,「$\vec{E}$ と $\vec{B}$ に垂直な平面の単位面積を通って毎秒流れる電磁波のエネルギー」であることを示せ。