

(令和7年8月7日実施)

令和8年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午前)

受験に関する注意

- 試験時間： 9:00～11:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II**を解答すること。
- 配布するのは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚 (A4)
	問題 II	3 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4) (各問題 1 枚)

問題 I

問 1 図 1 のように、質量 M 、長さ $2L$ の太さを無視できる密度が一様な剛体棒の中心より x だけ離れた点を支点とした剛体振り子の鉛直面内での運動を考える。鉛直線から反時計回りの方向にはかった位置の角度変数を θ 、重力加速度の大きさを g とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $0 < x \leq L$ とする。また、回転軸における摩擦および空気抵抗は無視できるものとする。必要があれば、支点まわりの剛体棒の慣性モーメントが、棒の線密度（単位長さあたりの質量）を ρ 、支点からの距離を r として $\int r^2 \rho dr$ となることを用いてよい。

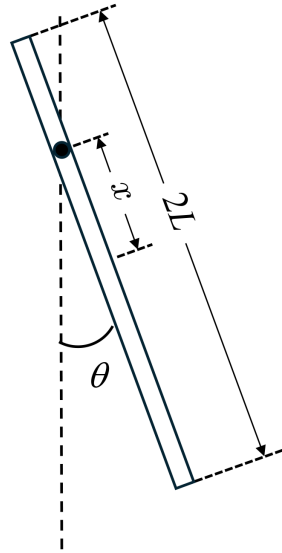


図 1

はじめに、剛体棒の一端を支点とする場合 ($x = L$) の剛体振り子について考える。

1-1. 棒の線密度 ρ を求め、剛体振り子の支点まわりの慣性モーメントを求めよ。

つぎに、剛体棒の中心より x だけ離れた点を支点とする場合の剛体振り子について考える。

1-2. この剛体振り子の支点まわりの慣性モーメントを求めよ。

1-3. 剛体振り子の運動エネルギー と位置エネルギーを角度変数 θ の関数として求めよ。ただし、位置エネルギーは $\theta = 0$ で 0 であるとする。

1-4. 剛体振り子にはたらく支点まわりの力のモーメントを角度変数 θ の関数として求めよ。

1-5. 角度変数 θ に関する剛体振り子の運動方程式を求めよ。

1-6. 相当単振り子の長さ（剛体振り子と同じ周期で振動する単振り子の長さ）を求め、相当単振り子の長さを x の関数として図示せよ。

問 2 図 2 のように、水平面に垂直に z 軸をとり、 $2az = x^2 + y^2$ で記述される滑らかな放物面の内側に沿って滑っている質量 m の質点の運動について考える。質点の位置を円柱座標 (r, ϕ, z) を用いて表すことにする。重力加速度の大きさを g とするとき、次の問いに答えよ。

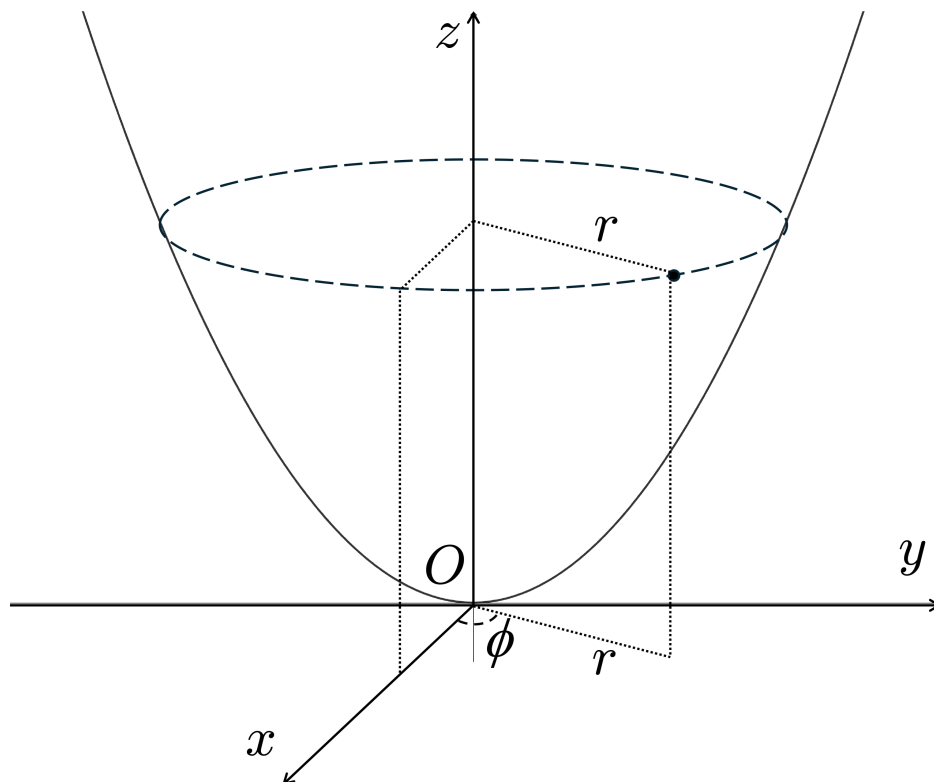


図 2

- 2-1. 独立変数を r, ϕ に選び、この系のラグランジアン $\mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ を表せ。 $\dot{r}, \dot{\phi}$ などのドットは時間微分を表す。ただし、重力のポテンシャルの基準点は $z = 0$ にとる。
- 2-2. r と ϕ についてのオイラー・ラグランジュの方程式を求めよ。
- 2-3. ϕ に共役な運動量 p_ϕ を求め、これが保存量であることを示せ。
- 2-4. 質点が r_0 で水平な等速円運動をしているときの p_ϕ の値 p_{ϕ_0} を求めよ。
- 2-5. 円運動が安定かどうかを調べるため、 p_ϕ の値を p_{ϕ_0} から変えないようにして質点の r 座標を少しだけずらした。 $r = r_0 + \rho$ において、 $\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}$ は同じ程度の微小量であるとして、オイラー・ラグランジュの方程式を ρ の 1 次までの精度で評価することにより、円運動が安定であることを示し、そのまわりの微小振動の周期 T を求めよ。

問題 II

問 1 図 1 のように真空中に半径 R の導体円板 A と B が間隔 $d(d \ll R)$ で配置された平行円板コンデンサーがある。導体 B の中心に原点 O をとり、導体 A, B の中心を通るように z 軸をとる。また、 z 軸からの距離を r , 真空の誘電率を ϵ_0 , 透磁率を μ_0 とし、導体の端における電場の乱れは無視できるものとする。このとき以下の問に答えよ。

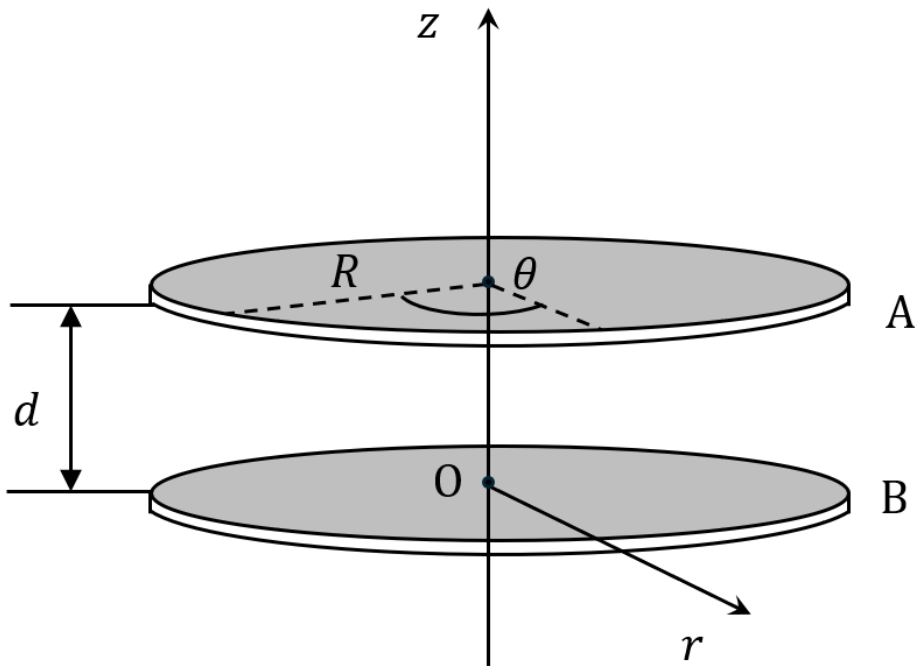


図 1

1-1. コンデンサーの静電容量を求めよ。

1-2. 導体 A と B の電荷が 0 からそれぞれ $+Q$ と $-Q$ となるまで導体間で電荷を移動させるのに必要な仕事を求めよ。

1-3. 導体 A, B が電荷 $+Q$, $-Q$ をもつとき導体 A, B の間に働く力の大きさ F_1 を求めよ。

この平行円板の間に、誘電率 ϵ の誘電体を $R/2 < r \leq R$ の範囲に挿入した。

1-4. コンデンサーの静電容量を求めよ。

- 1-5. 導体 A, B が電荷 $+Q, -Q$ をもつとき導体 A, B の間に働く力の大きさ F_2 を求めよ。また 1-3 の F_1 を用いて $F_1 = 1.5F_2$ と書けるとき, ϵ と ϵ_0 の間に成り立つ関係を求めよ。

次に導体 A, B を z 軸上にある導線をつなぎ, コンデンサーに正弦波電圧 $V(t) = V_0 \sin \omega t$ ($V_0 > 0$) を印加する。 t は時刻, ω は角振動数である。ただし, $t = 0$ で導体 A, B の電荷は 0 であった。また, 誘電体の特性は周波数によらず変化しないものとする。

- 1-6. コンデンサーに蓄積する電荷 $q(t)$ とコンデンサーの導体円板に流れ込む電流 $I(t)$, 電力 $P(t) = V(t)I(t)$ を求め, それぞれを t の関数として図示せよ。また, 導体 A に現れる最大の電荷の値 $q_{\max}$ と $q = 0$ から $q_{\max}$ まで蓄電するのに必要な仕事を求めよ。ただし, 電圧の変化は十分遅くコンデンサーから電磁波として放出されるエネルギーは無視できるものとする。

- 1-7. 電圧印加に伴って導体 A, B 間に生じる電束密度 $\mathbf{D}$ から電束電流密度 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を計算し, コンデンサーに流れる電束電流 (変位電流) $I_D(t)$ を求めよ。

- 1-8. 上で求めた電束密度と磁場は $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ のように書くことが出来る。この関係を用いて $z = d/2$ の平面において作られるコンデンサー内外の磁場の大きさ $H(r, t)$ を求め, $H(r, 0)$ を図示せよ。

問 2 真空中に、図 2 のように導線を半径 a の円周に N 回巻いた長さ l_0 ($l_0 \gg a$) のソレノイドを置く。両端の磁場の乱れは無視できるものとして以下の問に答えよ。ただし、真空の透磁率を μ_0 とする。図 2 で示すようにソレノイドの中心を原点 O とした円筒座標で考える。

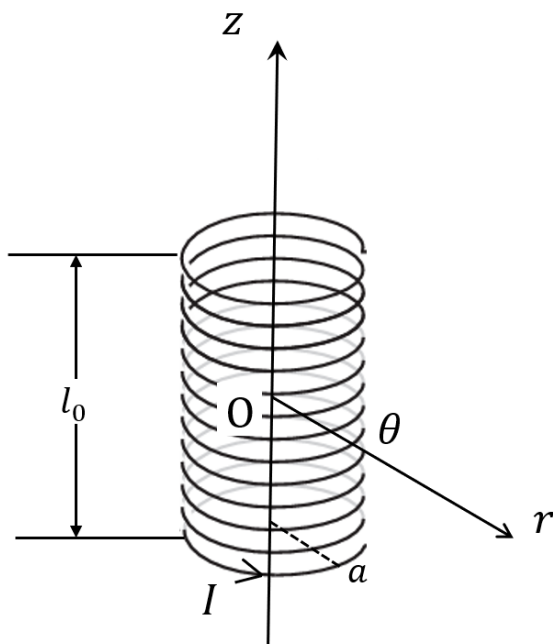


図 2

- 2-1. 導線に一定電流 I が流れているとき、アンペールの法則を用いてソレノイド内部の磁束密度の大きさ B を求めよ。
- 2-2. このソレノイドの自己インダクタンス L を求めよ。
- 2-3. 電流 $I(t)$ は $I(0) = 0$ から $I(t_1) = I$ と変化する。電流を 0 から I まで増加させるのに必要な仕事とソレノイドが持つ磁場エネルギーを求めよ。