

(令和7年8月7日実施)

令和8年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午後)

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者(宇宙理学専攻を併願する者を含む)：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 観測天文学, 理論宇宙物理学, 素粒子・宇宙論, 原子核理論, 情報メディア科学, 原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 惑星宇宙グループ, 宇宙物質科学グループ, 相転移ダイナミクス, 飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI の中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚 (A4)
	問題 IV	3 枚 (A4)
	問題 V	2 枚 (A4)
	問題 VI	5 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4) (各問題 3 枚)
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4) (各問題 1 枚)

問題 III

量子力学にしたがう質量 m , 角振動数 ω の 1 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}; \quad [q, p] = qp - pq = i\hbar$$

で与えられる。古典力学と違い、位置座標 q と運動量 p は交換しないことに注意しよう。ハミルトニアンやラグランジアンを表式は（量子古典を問わず）普遍的であるので、ここでは（ p と $\hat{p}$ のように）個々の変数に演算子であることをことさら強調する $\hat{}$ 記号をいちいち付けて区別することはしない。 $\mathcal{H}$ の規格化した波動関数及びその固有値を

$$\mathcal{H}\psi_n = \varepsilon_n\psi_n \quad (\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \cdots)$$

と書き、昇降演算子あるいは生成消滅演算子を

$$a^\dagger \equiv \frac{p + im\omega q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a \equiv \frac{p - im\omega q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

で定義する。

問 1 $\mathcal{H}$ を $a^\dagger$, a , ω を用いて表せ。

問 2 交換関係 $[\mathcal{H}, a^\dagger]$, $[\mathcal{H}, a]$ を計算せよ。

問 3 基底状態 ψ_0 は振動子ボソンの真空であり、エルミート内積 $(a\psi_0, a\psi_0) = 0$ が成立する。基底状態エネルギー ε_0 を求めよ。

問 4 励起状態の波動関数 ψ_n ($n = 1, 2, \cdots$) を ψ_0 と $a^\dagger$ で表し、その固有値 ε_n を求めよ。

続いて、一見異なる物理現象が実は調和振動子と同じ数学構造をもつ例を見てみよう。一様な静電場 $\mathbf{E}$ 及び静磁束密度 $\mathbf{B}$ の中で、質量 m , 電荷 e , 速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$ をもつ粒子はローレンツ力

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

を受ける。解析力学の技術も援用して、この粒子の運動を量子化してみよう。マクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

から、存在するベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$, スカラー・ポテンシャル ϕ を用いて、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

と表すことができる。ここで $\mathbf{A}$, ϕ は一般に位置ベクトル $\mathbf{q}$ と時間 t の関数であるが、速度 $\mathbf{v}$ には依らないものとする。一方、解析力学によれば、一般化した力の r 成分が

$$Q_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{U}(\{q_r, \dot{q}_r\})}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathcal{U}(\{q_r, \dot{q}_r\})}{\partial q_r}$$

と表せる場合、一般化ポテンシャル $\mathcal{U}(\{q_r, \dot{q}_r\})$ と運動エネルギー $\mathcal{T}(\{q_r, \dot{q}_r\})$ を用いてラグランジアン $\mathcal{L}(\{q_r, \dot{q}_r\})$ を定義することで、保存系と同様のラグランジュ運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\{q_r, \dot{q}_r\})}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \mathcal{L}(\{q_r, \dot{q}_r\})}{\partial q_r} = 0; \quad \mathcal{L}(\{q_r, \dot{q}_r\}) \equiv \mathcal{T}(\{q_r, \dot{q}_r\}) - \mathcal{U}(\{q_r, \dot{q}_r\})$$

が成立する。これまで用いてきたハミルトニアンは座標と運動量の関数であり、ラグランジアンを $\{\dot{q}_r\}$ についてルジャンドル変換

$$\mathcal{H}(\{q_r, p_r\}) = \sum_{r=1}^{\text{全自由度}} \dot{q}_r p_r - \mathcal{L}(\{q_r, \dot{q}_r\}); \quad p_r \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\{q_r, \dot{q}_r\})}{\partial \dot{q}_r}$$

したものである。簡単なベクトル演算を経て、ローレンツ力 $\mathbf{F}$ を与える一般化ポテンシャルは

$$\mathcal{U}(\{q_r, \dot{q}_r\}) = e\phi - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$$

と書けることが分かる。

問 5 この荷電粒子のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を $\mathbf{p}$, $\mathbf{A}$, ϕ を用いて表せ。

以下、 $\phi = 0$, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$ すなわち $\mathbf{E} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ の場合を考える。ここで、 $\mathbf{q}$ と $\mathbf{p}$ の直交座標成分表示を $\mathbf{q} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ と記す。

問 6 このとき、ハミルトニアンは $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) + \mathcal{H}(z, p_z)$ と変数分離できる。 $\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y)$ と $\mathcal{H}(z, p_z)$ を具体的に書き表せ。

問 7 面内ハミルトニアン $\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y)$ は、変数の置き換えを行うことで、**問 1** で求めた表式と全く同じ形に書くことができる。そのとき、 $a^\dagger$, a , ω を、ここで考えている静磁場中の荷電粒子運動に関連する変数演算子とパラメーターを用いて表せ。

問 8 $\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y)$ の基底状態波動関数を $R_0(x, y)$ とする。 $R_0(x, y)$ の具体形を実波動関数を仮定し規格化まで考慮して求めよ。またその固有値 $\varepsilon_0^\parallel$ を与えよ。

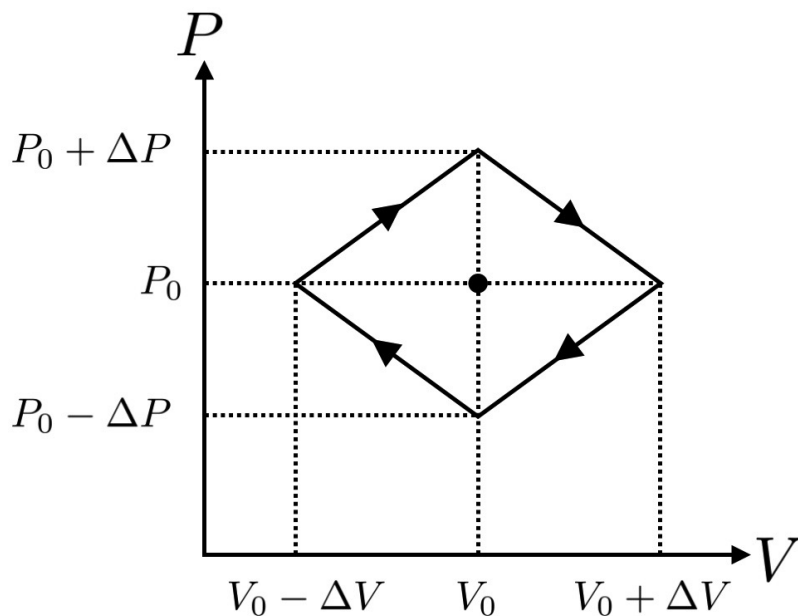
問 9 $\mathcal{H}(z, p_z)$ のエネルギー固有値を $\varepsilon^\perp > 0$ と書くとき、これに属する波動関数 $Z(z)$ の一般形を与えよ。その際、積分定数は A, B と記し、規格化は考慮しなくてよい。

問題 IV

問 1 以下の問いに答えよ。ただし、 U , S , P , V , T はそれぞれ系の内部エネルギー，エントロピー，圧力，体積，絶対温度を表し， R は気体定数とする。

1-1. $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ と $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ の二つの熱源の間で動作する可逆熱機関の最大効率を，有効数字二桁で求めよ。

1-2. 図のように， P - V 平面において気体が菱形の経路に沿って準静的に時計回りのサイクルを一周するとき，外部に対して気体が行う仕事を求めよ。



1-3. 一般の熱力学系における準静的過程を考える。系に δQ の微小熱量を与えた場合，熱力学第一法則より

$$\delta Q = TdS = dU + PdV$$

が成り立つ。 dU は内部エネルギー $U(T, V)$ の微小変化である。 T , V を独立変数としてエントロピーの全微分 dS を求めよ。

1-4. dS が完全微分であることから，1-3 の結果を用いて $(\frac{\partial U}{\partial V})_T$ を T , P , V を用いて求めよ。

理想気体では、分子間に相互作用が働かず、分子の体積も無視できる。一方、実在気体では分子間に相互作用が働き、分子自体にも有限の大きさがあるため、理想気体とは異なる挙動を示す。 n モルの気体のファン・デル・ワールスの状態方程式

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$$

は、こうした実在気体の効果を単純に取り入れたモデルであり、気体分子間の引力と有限体積の効果をパラメータ a, b を補正項として加えている。以下では、この状態方程式に従う $n = 1$ モルの気体を考える。ただし、 a, b は十分小さいとし、定積モル比熱 $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ が理想気体と同様に定数である場合を考える。

1-5. この気体の内部エネルギー $U(T, V)$ を求めよ。

1-6. 1-3 の結果を用いてエントロピー $S(T, V)$ を求めよ。

1-7. 準静的断熱過程におけるこの気体の断熱線の形を

$$T(V - b)^{\gamma-1} = \text{一定}$$

と書くとき、 γ を求めよ。

問 2 1 次元の環状イジング模型を考える。 N 個のイジングスピン $\sigma_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \dots, N$) が 1 次元に配置され、周期境界条件 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ を満たすとする。ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

と表される。ここで、 $J > 0$ は最近接スピン間の相互作用であり、 h は外部磁場である。 k_B をボルツマン定数、 T を温度、 $\beta = \frac{1}{k_B T}$ とする。分配関数 Z は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp \left(\beta J \sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{\beta J \sigma_1 \sigma_2 + \beta h \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}} e^{\beta J \sigma_2 \sigma_3 + \beta h \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}} \cdots e^{\beta J \sigma_N \sigma_1 + \beta h \frac{\sigma_N + \sigma_1}{2}} \\ &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} V_{\sigma_1, \sigma_2} V_{\sigma_2, \sigma_3} \cdots V_{\sigma_N, \sigma_1} \\ &= \text{Tr} (V^N) \end{aligned}$$

である。 $\text{Tr} (V^N)$ は行列 V の N 乗の対角和を表す。 2×2 の行列 V は

$$V = \begin{pmatrix} V_{+1,+1} & V_{+1,-1} \\ V_{-1,+1} & V_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{pmatrix}$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

2-1. 行列 V の固有値 $\lambda_{\pm}$ ($\lambda_+ > \lambda_-$) を β, J, h を用いて表せ。

2-2. 分配関数 Z を $\lambda_{\pm}$ を用いて表せ。

以下では熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ を考える。

2-3. 1 スピンあたりのヘルムホルツの自由エネルギー $f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N}$ を β, J, h を用いて表せ。

2-4. $h = 0$ の場合の 1 スピンあたりの比熱を求め、 $\frac{1}{\beta J} = \frac{k_B T}{J}$ の関数として図示せよ。

2-5. $h \neq 0$ の場合のスピン の 平均値 $m = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i=1}^N \sigma_i \right\rangle$ を β, J, h を用いて求めよ。

2-6. 有限温度 $T > 0$ において、 $\beta h \rightarrow 0$ とした場合の m の値を求めよ。また、絶対零度 $T = 0$ において、 $\beta J \rightarrow \infty$ としてから $\beta h \rightarrow 0$ とした場合の m の値を求めよ。

問題 V

以下の問 1 から問 4 に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 以下の行列 A のすべての固有値と、各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2 $y_1(x), y_2(x)$ はいずれも $x \geq 0$ で定義される実関数であり、微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -\lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 \end{aligned}$$

をそれぞれ満たす。 λ_1, λ_2 は値の異なる実定数であり、 $y_1(0) = y_0, y_2(0) = 0$ である。このとき、以下の問に答えよ。

2-1. $y_1(x)$ を求めよ。

2-2. $y_2(x)$ を求めよ。

問 3 以下の式が成り立つことを示せ。

3-1. $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$ (ただし $\mathbf{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトル, $r = |\mathbf{r}| > 0$)

3-2. $\oint_C (x dy - y dx) = 2S$ (ただし C は xy 平面上の閉曲線, S は C で囲まれた領域の面積)

問 4 x を実数, $a (> 1)$ を実定数, i を虚数単位, $z = e^{ix}$ とする。このとき、以下の問に答えよ。

4-1. $\cos x, \sin x$ を z を用いて表せ。

4-2. 次の式中的実定数 C_n ($n = 0, 1, \dots, 5$) を求めよ。ただし, $C_2 > 0$ とする。

$$\frac{\sin^2 x}{a + \cos x} = C_0 z + C_1 + \frac{C_3 z}{z + a + C_2} + \frac{C_4 z}{z + a - C_2} + \frac{C_5}{z}$$

4-3. **4-2** の結果を使って, 実積分 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + \cos x} dx$ の値を求めよ。

問題 VI

以下の問 1 と問 2 に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 地球と惑星の大気放射に関して以下の問に答えよ。

- 1-1. 図 1 はハワイのマウナロアで観測された二酸化炭素濃度 (ppm) の時間変化を表している。この図からわかることを 2 点, それぞれ 30 文字以内で述べよ。また, 現在宇宙から衛星を用いて地球全体の二酸化炭素濃度を測定できるようになったにもかかわらず, ハワイのマウナロアで観測を続ける地球科学的な意義を 80 文字以内で述べよ。

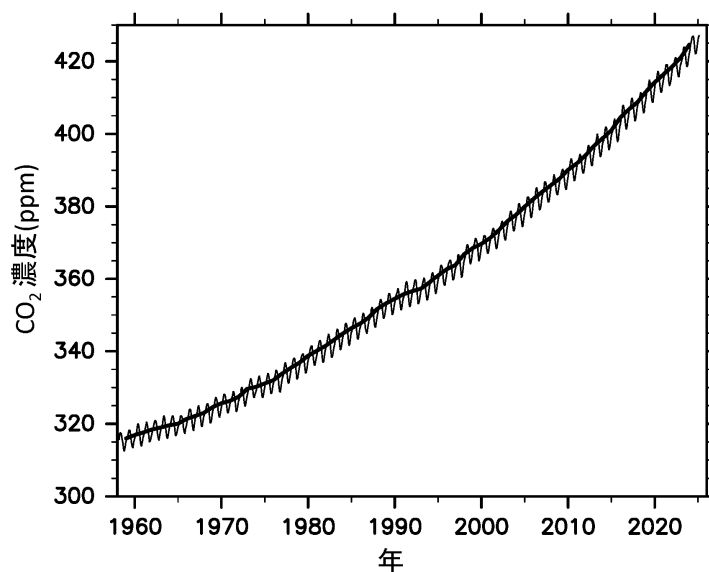


図 1 ハワイのマウナロアで観測された二酸化炭素濃度 (ppm) の時間変化。細線が月平均値, 太線が年平均値。

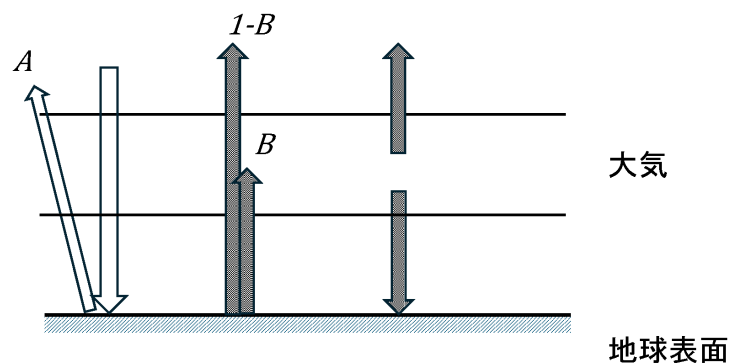


図 2 大気が 1 層と仮定したときの地球での放射エネルギーバランスの模式図

- 1-2. 地球に 1 層の均一な大気があると仮定する (図 2)。太陽放射と地球放射を地球表面全体で平均して考える。太陽放射は大気に対しては透明であり, 地球表面で A の割合で反射

するものとする。地球放射は B の割合で大気に吸収されるものとする。太陽放射と地球放射は地球全体ではつり合っているとすると。地球表面全体で平均した太陽放射を I_s , 地球表面温度を T_{g1} , 大気平均温度を T_{a1} とし, これらを用いて以下の 2 つの式を示せ。ただし, ステファンボルツマン定数は σ とする。

(1) 地球表面での放射エネルギーバランスの式

(2) 大気層での放射エネルギーバランスの式

1-3. 架空の惑星に, ヘイズ (もや) を含む 1 層の均一な大気があると仮定する (図 3)。太陽放射と惑星からの放射を惑星表面全体で平均して考える。太陽放射は C_1 の割合で大気に反射され, C_2 の割合で大気に吸収され, 惑星表面で反射されないものとする。惑星からの放射に対して大気は透明であるとする。太陽放射と惑星からの放射は惑星全体ではつり合っているとすると。惑星表面全体で平均した太陽放射は地球と同じ I_s , 惑星表面温度を T_{g2} , 大気平均温度を T_{a2} とし, これらを用いて以下の 2 つの式を示せ。ただし, ステファンボルツマン定数は σ とする。

(1) 惑星表面での放射エネルギーバランスの式

(2) 大気 (ヘイズ) 層での放射エネルギーバランスの式

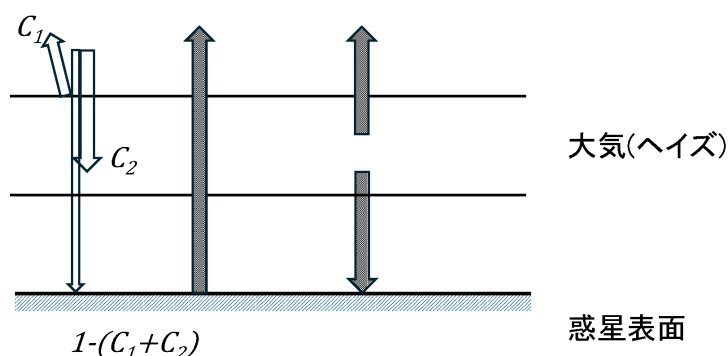


図 3 大気が 1 層と仮定したときの惑星での放射エネルギーバランスの模式図

1-4. 1-2 と 1-3 で求めた放射エネルギーバランスの式を用いて大気が 1 層のときの地球と架空の惑星の表面温度 T_{g1} , T_{g2} をそれぞれ有効数字 2 ケタで求めよ。4 乗根の計算には表 1 を用いよ。ただし, 地球, 架空の惑星いずれも太陽定数 (鉛直方向に入射する単位時間, 単位面積あたりの太陽放射エネルギー) は $S = 1400 \text{ W m}^{-2}$ とする。また, $A = 0.3$, $B = 0.9$, $C_1 = 0.3$, $C_2 = 0.6$, $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ とする。

1-5. 今度は地球に大気がないと仮定し, 太陽放射と地球放射が地球全体でつり合い, 地球表面温度が一定に保たれているとする。このときの地球表面の温度 T_{g0} を求め, 1-4 で求めた T_{g1} , T_{g2} との差をそれぞれ有効数字 2 ケタで求めよ。ただし, $A = 0.3$, $S = 1400 \text{ W m}^{-2}$, $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ とする。

1-6. アメリカのプリンストン大学の真鍋叔郎氏が 1967 年に発表した論文では, 地球大気中の

表 1 4 乗根の計算表

n	$n^{1/4}$	n	$n^{1/4}$	n	$n^{1/4}$	n	$n^{1/4}$	n	$n^{1/4}$
2	1.2	13	1.9	31	2.4	53	2.7	73	2.9
3	1.3	17	2.0	37	2.5	59	2.8	79	3.0
5	1.5	19	2.1	41	2.5	61	2.8	83	3.0
7	1.6	23	2.2	43	2.6	67	2.9	89	3.1
11	1.8	29	2.3	47	2.6	71	2.9	97	3.1

二酸化炭素濃度を 2 倍にした数値実験を行い、地球表面温度が 2 度上昇することを明らかにした。これらを含めた業績が評価され、2021 年にノーベル物理学賞を受賞した。図 2 で示した地球大気が 1 層のモデルを用いて、大気中の二酸化炭素濃度を 2 倍にした実験を行うには、 S, A, B のどれを変化させればよいか答えよ。また、変化の方向は増加か減少かどちらか答えよ。

問 2 地球対流圏で吹く風に関して以下の問に答えよ。

2-1. 図 4 は 2024 年 8 月の地球対流圏の平均東西風速を表す。(a), (b) どちらが札幌での平均東西風か答えよ。また, その理由を 30 文字以内で述べよ。

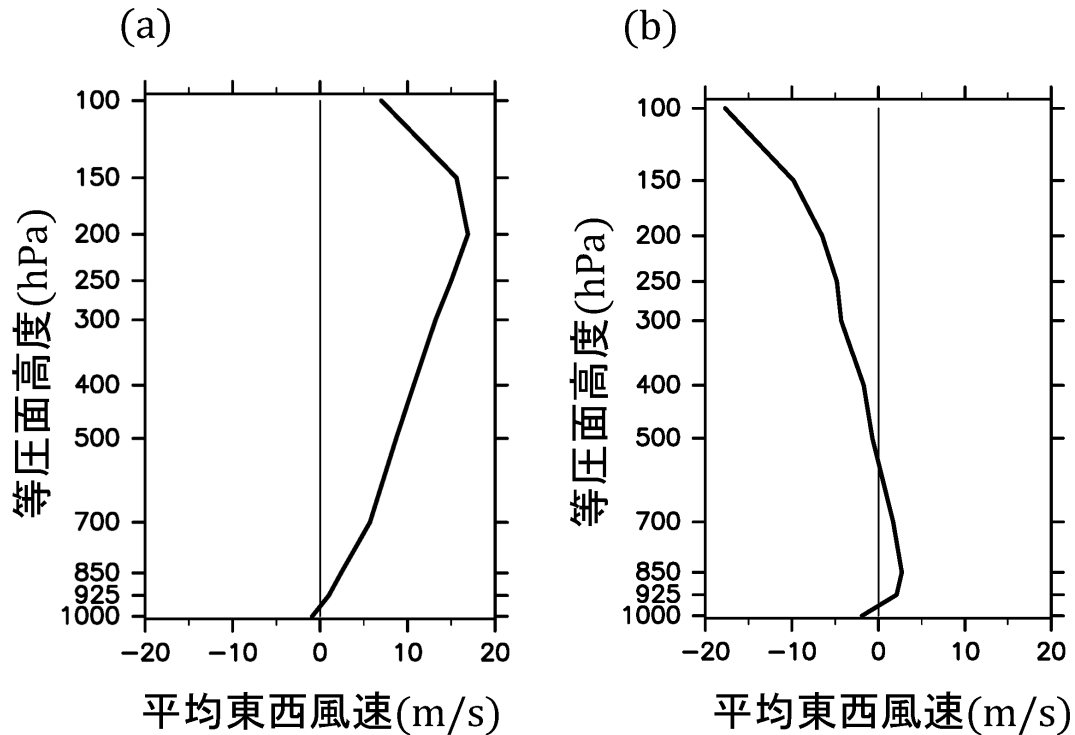


図 4 2024 年 8 月の地球対流圏の平均東西風速の鉛直分布。正の値が西風を表す。

2-2. 地球大気の水方向の運動を考える。図 5(a) のような地球の北半球の対流圏において, 南が高く北が低い気圧場を考える。地球表面から離れた対流圏を想定し, 地球表面との摩擦は考慮しない。また, 大気擾乱はなく, 水平風は一定に吹いているとする。鉛直方向には力が釣り合っており運動はしていないとする。図 5(a) の網掛部分は, 気圧 p の等圧線と気圧 $p - dp$ の等圧線の間にある空気塊であり, 図 5(b) で示すように等圧線方向に ds , 等圧線に対して直角方向に dn , 高さ方向に dz の微小直方体とする。ただし微小直方体内の大気の密度を ρ とする。この空気塊にかかる気圧差による, 単位質量あたりの力を求めよ。

2-3. 図 5 で示した空気塊にかかる力は水方向で釣り合い, 空気塊は一定の速度で水方向に移動していると仮定する。 x (東西) 軸方向, y (南北) 軸方向それぞれの運動方程式を求めよ。ただし, 水平風速は $\mathbf{V} = (u, v)$, コリオリ力の大きさは $F = 2\Omega|\mathbf{V}|\sin\theta$ とする。 Ω は地球の自転角速度, θ は緯度を表す。 x 軸は西風が正, y 軸は南風が正とする。

2-4. 2-3 で求めた運動方程式を用いて u, v を求めよ。

2-5. これまでコリオリ力が働く地球対流圏の北半球での大気の運動を考えてきた。コリオリ

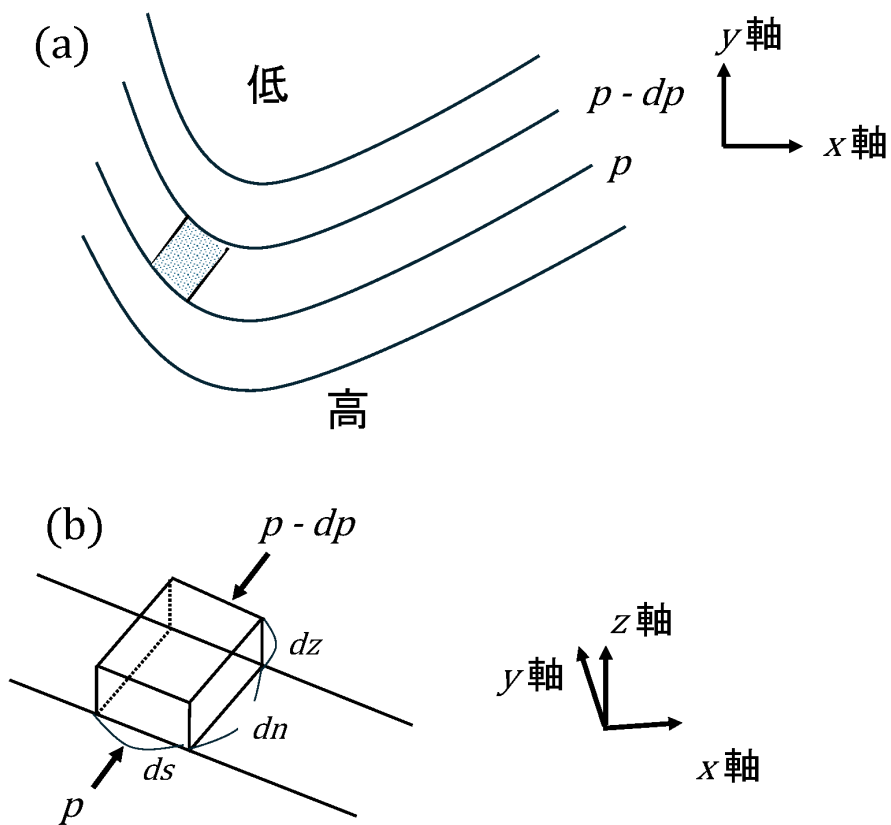


図5 (a) 地球の北半球の対流圏における、南が高く北が低い気圧場にある微小な空気塊 (網掛部分) の2次元図。(b) 3次元座標での微小な空気塊の拡大図。

力が働かない赤道域で考えられる運動を1つ挙げ、それを引き起こす原因を50文字以内で述べよ。