

(令和8年8月10日実施)

令和9年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午前)

受験に関する注意

- 試験時間： 9:00～11:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II**を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	4 枚 (A4)
	問題 II	2 枚 (A4)
解答紙	問題 I	3 枚 (B4)
	問題 II	3 枚 (B4)
草案紙	問題 I, II	2 枚 (B4) (各問題 1 枚)

問題 I

以下の問 1 と問 2 に答えよ。解答に当たっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 図 1 のように、質量 M 、長さ L の密度が一様で太さを無視できる 2 本の剛体棒 G_1 、 G_2 が連結され、質量 $2M$ 、長さ $2L$ の 1 本の棒となっている。棒の一端は点 O で固定されており、棒は O を支点として滑らかに回転することができる。1-1 から 1-4 まではこの棒は直線状の 1 本の剛体棒 G と考えられるとし、重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。ただし、空気抵抗は無視できるものとする。

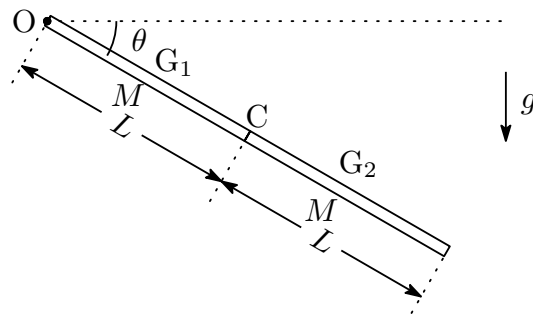


図 1

- 1-1. 剛体棒 G の O まわりの慣性モーメント I と中点 C まわりの慣性モーメント I_C が $I = \frac{8}{3}ML^2$ 、 $I_C = \frac{2}{3}ML^2$ となることを示せ。

以下の問いでは、慣性モーメントとして I 、 I_C は用いず、 M 、 L を用いて答えよ。

- 1-2. 剛体棒 G を水平な状態 ($\theta = 0$) から静かに放したあと、 G が鉛直 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) になったときの、 G の O まわりの角速度 ω_0 を求めよ。
- 1-3. 剛体棒 G を水平な状態 ($\theta = 0$) から静かに放したあと、 G が水平面となす角が θ になったときに G が O から受けている力について、棒に平行な成分 $T_{\parallel}$ 、および、棒に垂直な成分 $T_{\perp}$ を求めよ。
- 1-4. 1-3 のときに、剛体棒 G の図 2 のような O からの距離が x から $x + dx$ までの微小部分に対して、 O まわりの回転運動の運動方程式を考えることにより、この微小部分が O から距離 x の端点で受けている剪断力 $F(x)$ を求めよ。ただし、剪断力は剛体の断面をずらすように働く力で、今の場合、 $F(x)$ はこの微小部分が受ける力で、 O から距離 x までの剛体棒の部分がこの微小部分に対して棒に垂直に及ぼす力である。また、 $F(x)$ の符号は O まわりのトルク（力のモーメント）が正になる向きを正とする。ただし、 $F(x)$ は他の方法でも求めることができ、異なる方法を用いた場合には部分点を与える。

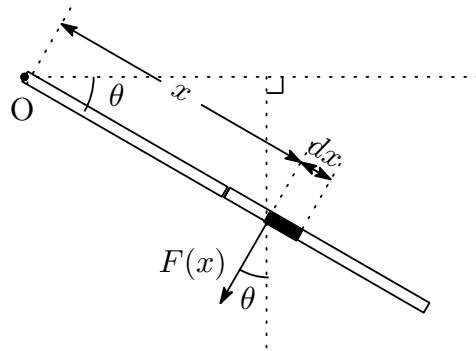


図 2

水平な状態から静かに放された剛体棒 G が鉛直になった瞬間に、図 3 のように、 G の中点が O の鉛直下方で固定された大きさの無視できる障害物と衝突して連結が壊れ、衝突後は上側の剛体棒 G_1 は障害物と合体して静止し、下側の剛体棒 G_2 は C を支点として滑らかに回転運動を続けた。

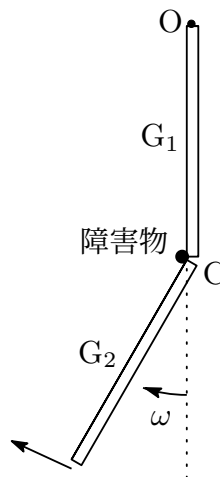
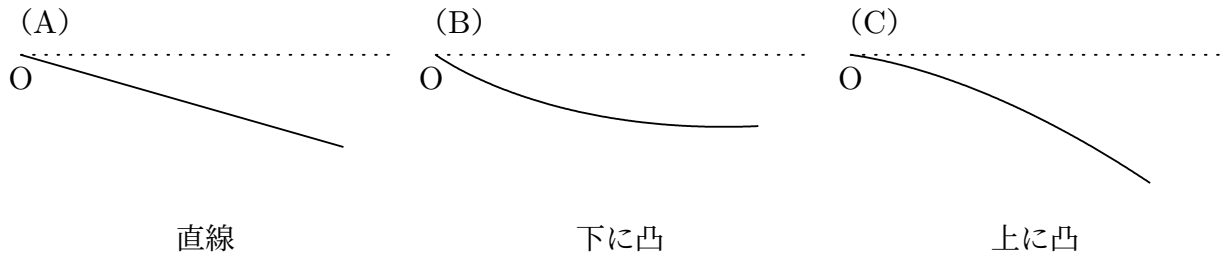


図 3

- 1-5. 衝突直後の G_2 の C まわりの回転の角速度 ω を ω_0 を用いて表せ。ただし、衝突までは G は 1-2 のように 1 本の剛体棒として O のまわりを回転するとし、衝突で連結が壊れる際に G_2 が G_1 から受ける C まわりのトルクは無視できるとする。

- 1-6. 剛体棒 G の代わりに質量 $2M$ 、長さ $2L$ の密度が一様で太さを無視できる伸び縮みしないひもを用意する。点 O で端点を固定したひもを水平な状態で支え（台に乗せるなど）、支えを取り去って静止状態から放す。落下開始後少し時間が経過したときのひもの概形は次の (A) から (C) のどれに近いのか、理由をつけて答えよ。ただし、ひもは伸び縮みはしないが自由に変形できるとし、ひもは十分に長く形状の判別ができるものとする。



問 2 図 4 のように、質量 m_1 と m_2 の質点が、長さ l の質量を無視できる糸で水平な天井の原点 O および O から距離 L 離れた点 A から吊り下げられており、2 個の質点は質量を無視できる自然の長さ L 、ばね定数 k のばねで結ばれている。糸、質点、ばねが鉛直面内で行う運動を考え、2 本の糸が鉛直方向となす角を θ_1, θ_2 とし、重力加速度の大きさを g とする。このとき、2 個の質点が糸がたるまないように行う運動について、以下の問いに答えよ。ただし、空気抵抗は無視できるものとする。

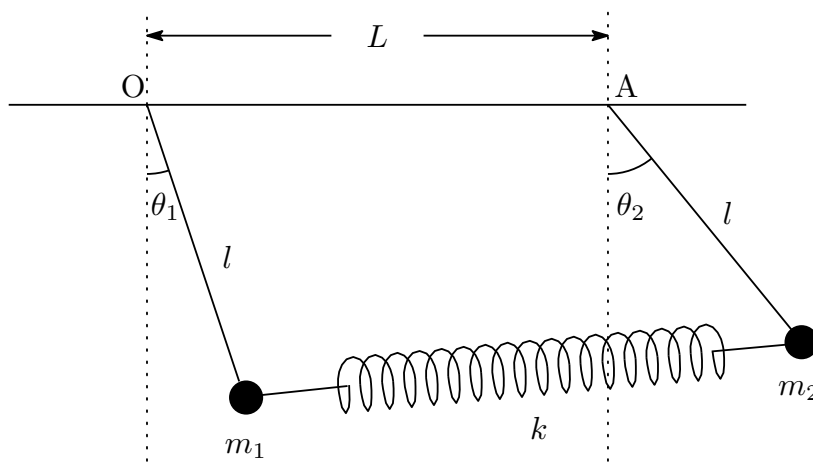


図 4

- 2-1.** 一般化座標を θ_1, θ_2 にとり、 θ_1, θ_2 が微小ではない場合に、この系のラグランジアンを求めよ。ただし、ポテンシャルエネルギーは 2 本の糸が鉛直になっているときを基準とせよ。
- 2-2.** θ_1, θ_2 が微小であるとき、ラグランジアンを θ_1 と θ_2 の 2 次までの（3 次以上の量を無視する）近似で書き下し、 θ_1 と θ_2 についてのオイラー・ラグランジュ方程式が θ_1, θ_2 の 1 次までの（2 次以上の量を無視する）近似で次式で与えられることを示せ。

$$m_1 l^2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + m_1 g l \theta_1 - k l^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$$m_2 l^2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + m_2 g l \theta_2 + k l^2 (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

- 2-3.** θ_1, θ_2 が微小であるとき、この系の 2 種類の基準振動の周期を求めよ。
- 2-4.** 時刻 $t = 0$ に $\theta_1 = 0, \theta_2 = \phi$ の位置で 2 個の質点を静止状態から放すとき、時刻 t における θ_1 を求めよ。ただし、 ϕ は微小な角度とする。

問題 II

以下の問 1 と問 2 の全ての設問に答えよ。解答に当たっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 物質中のマクスウェル方程式 (1)～(4) に関する以下の問いに答えよ。ここで、電場、電束密度、磁場、磁束密度、電流密度、電荷密度をそれぞれ $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \rho$ で表す。物質は等方的で透磁率 μ と誘電率 ε は一定であり、 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ の導関数は全て連続であるとする。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

なお、解答には以下のベクトル恒等式を用いても良い。

$$\mathbf{X} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z})\mathbf{Y} - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})\mathbf{Z}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{Y} \times \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \cdot (\nabla \times \mathbf{Y}) - \mathbf{Y} \cdot (\nabla \times \mathbf{Z})$$

1-1. マクスウェル方程式から連続の方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

が成り立つことを示せ。

1-2. ポインティングベクトルが $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ と定義され、電磁気的エネルギー密度が $W = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$ で与えられるとき、

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial W}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (6)$$

が成り立つことを示せ。

1-3. 式 (6) において、物質の伝導率 σ が 0 である場合 ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = 0$) を考えることにより、ポインティングベクトルの物理的意味を説明せよ。

1-4. 電場と磁束密度はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ によって、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表され、それらは $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0$ (ローレンツゲージ) を満たすとする。このとき、

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}$$

が成り立つことを示せ。

問 2 真空中において、半径 a 、巻き数 N_1 の 2 つの円形コイルを xy 平面内、中心を原点 O からそれぞれ $z = \pm \frac{a}{2}$ の位置に固定し、図 1 のように z 軸の正方向に対して右ネジの向きに同じ電流 I_1 を流す。以下の問いに答えよ。ただし、コイルの厚みは無視できるものとし、真空の透磁率を μ_0 とする。

2-1. $z = +\frac{a}{2}$ の位置にある片側のコイルが z 軸上に作る磁束密度 $B(z)$ をビオ・サバルの法則から導出せよ。

2-2. 2 つのコイルによる合成磁場を原点 O の近傍 ($|z| \ll a$) で展開し、 z の 3 次以上の項を無視する近似を行うと、磁束密度の大きさは $B(z) \approx \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{a}$ となり、 z によらず一定となることを示せ。

次に、図 2 のように原点 O に z 軸から中心軸の角度を θ ($\theta < \frac{\pi}{2}$) だけ傾けて、半径 b ($\ll a$)、巻き数 N_2 の小さな円形コイルを配置した。この小さなコイルを貫く磁場は一様であると近似してよい。

2-3. 小さなコイルと 2 つの大きなコイルの間の相互インダクタンス L を求めよ。

2-4. 次に、小さなコイルに電流 I_2 を図 2 の矢印で示す向きに流す。このとき小さなコイルにはたらくトルクの大きさ τ を求め、そのトルクは角度 θ を増加させる向きか、減少させる向きか答えよ。

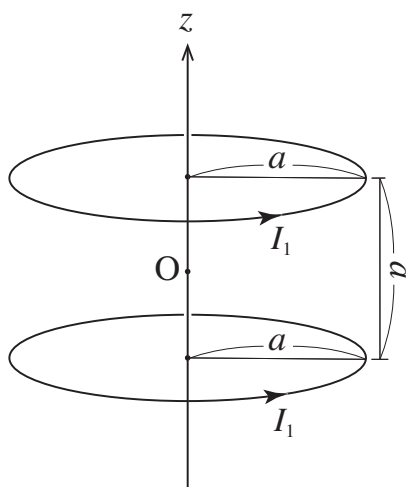


図 1

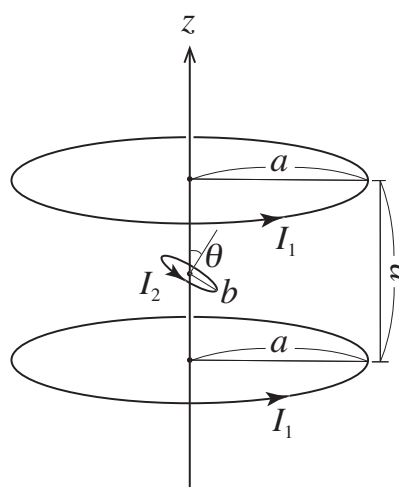


図 2