

(令和8年8月10日実施)

令和9年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午後)

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者(宇宙理学専攻を併願する者を含む)：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 観測天文学, 理論宇宙物理学, 素粒子・宇宙論, 原子核理論, 情報メディア科学, 原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 惑星宇宙グループ, 宇宙物質科学グループ, 相転移ダイナミクス, 飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI の中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	3 枚 (A4)
	問題 IV	3 枚 (A4)
	問題 V	2 枚 (A4)
	問題 VI	4 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4) (各問題 3 枚)
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4) (各問題 1 枚)

問題 III

以下の問 1 と問 2 に答えよ。解答に当たっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 水素原子において、クーロンポテンシャル中を運動する電子を考える。原点に電荷 $+e$ ($e > 0$) をもつ原子核が固定されており、電子の質量を m_e 、電荷を $-e$ とする。電子スピンは無視する。 ε_0 を真空の誘電率とすると、この系のハミルトニアンは運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}}$ を用いて

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

と書くことができる。ここでは極座標 $(x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ を用いる。 $\hat{H}_0$ の固有状態 $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ は主量子数 n 、軌道角運動量量子数 l 、磁気量子数 m によって特徴づけられる。 $R_{nl}(r)$ は動径方向の波動関数であり、 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は球面調和関数である。以下では $n = 2$ の縮退した 4 つのエネルギー固有状態として、極座標表示で

$$\psi_{200}(r, \theta, \phi) = R_{20}(r)Y_{00}(\theta, \phi)$$

$$\psi_{21m}(r, \theta, \phi) = R_{21}(r)Y_{1m}(\theta, \phi), \quad (m = 0, \pm 1)$$

の 4 つの軌道を考える。ただし、

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0} \right) e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0} \right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

であり、 a_0 はボーア半径である。以下では、摂動ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \lambda \hat{T}_z \\ \hat{T}_z &= \frac{1}{2} \left(\hat{x} \hat{l}_y - \hat{y} \hat{l}_x \right) + \frac{1}{2} \left(\hat{l}_y \hat{x} - \hat{l}_x \hat{y} \right) \end{aligned}$$

を加えた場合を考える。ここで $\hat{\mathbf{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z) = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ は軌道角運動量演算子である。以下の問いに答えよ。

1-1. $\hat{T}_z$ がエルミート演算子であることを示せ。

1-2. 空間反転操作 ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) および時間反転操作 ($t \rightarrow -t$) に対して、 $\hat{T}_z$ がどのように変換されるか答えよ。

1-3. $\hat{T}_z$ が極座標を用いて

$$\hat{T}_z = -i\hbar r \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \theta \right)$$

と表されることを示せ。ただし、交換関係 $[\hat{l}_x, \hat{y}] = i\hbar \hat{z}$, $[\hat{l}_y, \hat{x}] = -i\hbar \hat{z}$ と軌道角運動量演算子の極座標表示

$$\hat{l}_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad \hat{l}_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

を用いて良い。

1-4. 行列要素 $\langle \psi_{210} | \hat{T}_z | \psi_{200} \rangle$ を $\hbar, a_0$ を用いて求めよ。必要であれば

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

を用いてよい。

1-5. 基底 $\{|\psi_{200}\rangle, |\psi_{210}\rangle, |\psi_{21+1}\rangle, |\psi_{21-1}\rangle\}$ における $\hat{H}'$ の 4×4 行列表現を $\lambda, \hbar, a_0$ を用いて求めよ。

1-6. 以上の結果を用いて、縮退した4つのエネルギー固有状態 $\{|\psi_{200}\rangle, |\psi_{210}\rangle, |\psi_{21+1}\rangle, |\psi_{21-1}\rangle\}$ に対する $\hat{H}'$ によるエネルギー補正を1次摂動の範囲で $\lambda, \hbar, a_0$ を用いて求め、対応する4つの固有状態を求めよ。

問 2 電子のスピン角運動量について考える。スピン角運動量演算子を $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ とする。

$\hat{s}^2$ と $\hat{s}_z$ の同時固有状態 $|s, m\rangle$ は

$$\hat{s}^2 |s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m\rangle, \quad \hat{s}_z |s, m\rangle = \hbar m |s, m\rangle$$

を満たす。電子では $s = 1/2$, $m = \pm 1/2$ であり、以下では簡単のため $|\pm\rangle = |1/2, \pm 1/2\rangle$ と表す。基底 $|\pm\rangle$ を

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると、パウリ行列 $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ を用いて $\hat{\mathbf{s}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ と表される。ここで、 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ はそれぞれ

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

このスピンに、 x - z 平面内で z 軸となす角 θ をもつ磁束密度 $\mathbf{B}$ の一様磁場

$$\mathbf{B} = B(\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

を加える。相互作用定数を λ とすると、系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\lambda \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{s}}$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

2-1. $\hat{s}^2$ と $\hat{s}_z$ が可換であることを示せ。

2-2. 基底 $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ におけるハミルトニアン $\hat{H}$ の 2×2 行列表現を求めよ。

2-3. ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値と対応する規格化された固有状態を求めよ。

2-4. 状態 $|+\rangle$ においてエネルギーを測定したとき、各エネルギー固有値が得られる確率を求めよ。

問題 IV

以下の問 1 と問 2 に答えよ。解答に当たっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 以下の問いに答えよ。ただし、 U , p , V , T はそれぞれ内部エネルギー、圧力、体積、絶対温度である。また、気体定数を R とする。

1-1. 一般の熱力学系における準静的過程を考える。系に $d'Q$ の微小熱量を与えた場合、熱力学第一法則より以下の関係が成り立つ。

$$dU = d'Q - pdV$$

系の内部エネルギー U が温度と体積の関数 $U(T, V)$ であることを考えると、以下の式が成り立つことを示せ。

$$d'Q = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left\{ p + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right\} dV$$

1-2. 系が 1 モルの理想気体であるとする。系の定積モル比熱は $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ 、定圧モル比熱は $C_p = \left(\frac{d'Q}{dT} \right)_p$ と表される。理想気体の内部エネルギーは温度のみに依存することを考えると、 C_V と C_p には以下の関係が成り立つことを示せ。

$$C_p - C_V = R$$

1-3. 理想気体が準静的に断熱変化する場合、以下の関係が成り立つことを示せ。ただし、 γ は比熱比であり、 $\gamma = C_p/C_V$ とする。

$$TV^{\gamma-1} = \text{一定}$$

図 1 のような p - V 図上の熱サイクル（ディーゼルサイクル）を考える。ここで $A \rightarrow B$ は断熱圧縮過程（過程 1）、 $B \rightarrow C$ は定圧過程（過程 2）、 $C \rightarrow D$ は断熱膨張過程（過程 3）、 $D \rightarrow A$ は定積過程（過程 4）であり、全ての過程は準静的に行われるものとする。

作業物質は 1 モルの理想気体とし、作業物質の定圧モル比熱を C_p 、定積モル比熱を C_V 、比熱比 (C_p/C_V) を γ とする。図中に示したように、各状態 A, B, C, D での作業物質の温度を T_A, T_B, T_C, T_D とし、体積を V_A, V_B, V_C, V_D とする。ただし、 $V_B < V_C < V_A = V_D$ である。以下の問いに答えよ。

1-4. 過程 1～過程 4 の各過程で、作業物質に流入した熱量 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 を $C_p, C_V, T_A, T_B, T_C, T_D$ を用いて表せ。

1-5. この熱サイクルの熱効率 η を $\gamma, T_A, T_B, T_C, T_D$ を用いて表せ。

1-6. $\varepsilon = V_A/V_B, \sigma = V_C/V_B$ として, T_B, T_C, T_D を $\gamma, \varepsilon, \sigma, T_A$ を用いて表せ。

1-7. ε を一定として σ を大きくした場合, 以下の (i), (ii) の値はどのように変化するかを選択肢 (a)~(c) の中から選べ。

(i) 熱効率 η

(ii) 1 サイクルで作業物質が外部にする仕事 W

(a) 大きくなる (b) 変わらない (c) 小さくなる

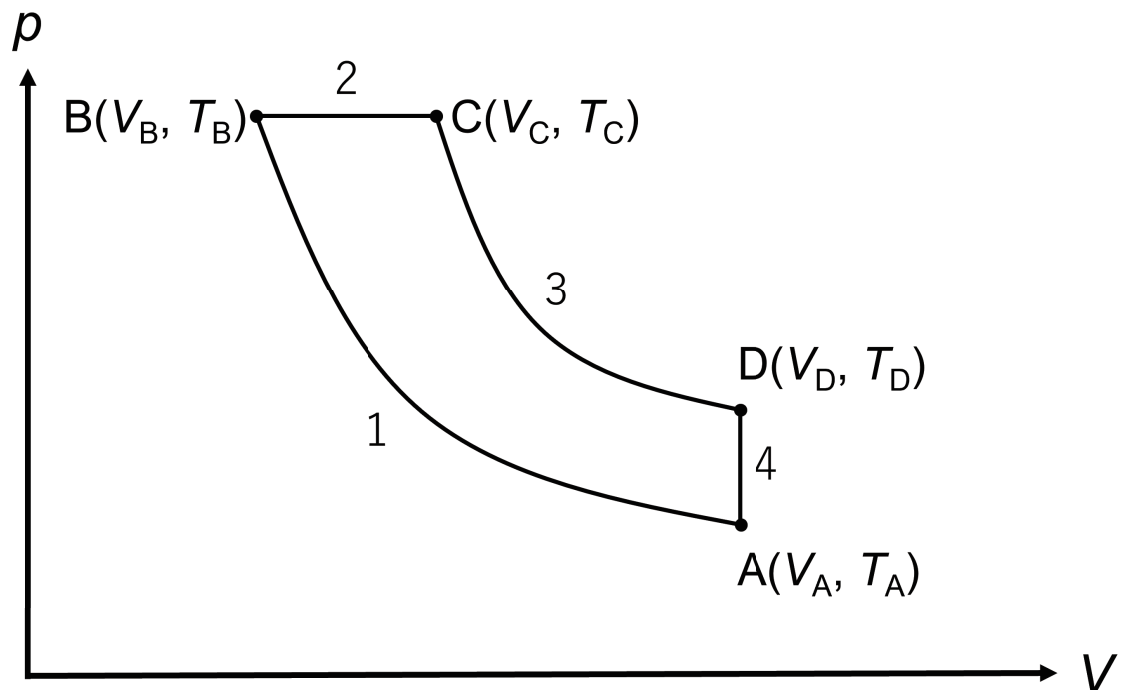


図 1

問 2 磁場に対して平行か反平行のスピン状態をとる磁気モーメント μ の原子 N 個からなる系を考える。この系が磁束密度 B の一様な磁場中に置かれると、ゼーマン効果によりエネルギーは $-\mu B, +\mu B$ の 2 準位に分裂する。磁気モーメントの間に相互作用はないものとする。ボルツマン定数を k_B として以下の問いに答えよ。

系が磁束密度 B の一様な磁場中に置かれ、絶対温度 T の熱浴と熱平衡状態にある場合を考える。

2-1. 系の自由エネルギー $F(B, T)$ とエントロピー $S(B, T)$ を求めよ。

2-2. 以下の条件におけるエントロピーの低温極限 ($T \rightarrow 0$) での値をそれぞれ求めよ。

(i) 磁場がゼロの場合 ($B = 0$)

(ii) 磁場が有限の場合 ($B > 0$)

2-3. 磁場が有限の場合 ($B > 0$) における系の定積比熱 $C_V(B, T)$ を求めよ。

2-4. 最初、この系が磁束密度 B_1 の一様な磁場中で温度 T_1 の熱浴と熱平衡状態にあったとする。この状態から系を熱浴から離して、断熱状態で磁束密度を B_1 から B_2 まで減少させた ($B_1 > B_2 > 0$)。 $S(B, T)$ は B/T を変数とする単調増加関数であることを考えて、磁場を減少させた後の系の温度 T_2 を求めよ。

問題 V

以下の問 1 から問 3 に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

問 1 以下のように定義される行列 A を対角化せよ。また、そのときの変換行列 P も求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

問 2 以下の問に答えよ。

2-1. i, j, k をそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとする。3 つのベクトル A, B, C がそれぞれ

$$\begin{aligned} A &= 2i - j + 3k \\ B &= 4i + 2j - k \\ C &= -i + 5j + 2k \end{aligned}$$

で与えられるとき、以下を求めよ。

(i) $A \cdot (B \times C)$

(ii) $(A \times B) \times C$

2-2. A は連続微分可能なベクトル関数、 n は曲面上の法線ベクトルとする。このとき、以下の式を証明せよ。ただし、 S は閉曲面、 V は S で囲まれた領域 (またはその体積) とする。

$$\int_V (\nabla \times A) dV = - \int_S A \times n dS$$

2-3. 中心力 F は位置ベクトル r を用いて一般に

$$F = f(r) \frac{r}{r}$$

と表される。ここで、 $r = |r|$ であり、 $f(r)$ は r のみに依存するスカラー関数である。このとき中心力場の中で運動する質点について、面積速度

$$\frac{1}{2} r \times \frac{dr}{dt}$$

は時間 t によらず一定であることを示せ。

問 3 i を虚数単位とする。このとき、以下の問に答えよ。

3-1. $-i$ の平方根を求めよ。

3-2. z を複素数, r を z の絶対値, θ を z の偏角, u, v をそれぞれ複素関数 $f(z)$ の実部と虚部とする。 $f(z)$ が正則のとき、以下の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

3-3. 次の実関数を複素数 z の関数に変換し、極における留数を求めよ。

$$\frac{1}{\sin \theta + 2}$$

3-4. 3-3. の結果を使って、実積分 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta + 2} d\theta$ の値を求めよ。

問題 VI

以下の問 1 から問 3 に答えよ。

問 1 地球の内部構造の模式図を図 1 に示す。以下の問に答えよ。

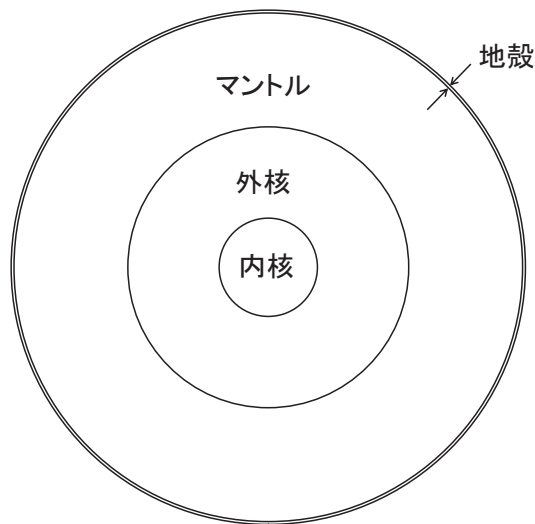


図 1 地球の内部構造。

- 1-1. 地殻とマントルの境界面は、地震学的にどう呼ばれているか答えよ。またこの境界面を挟んで地震波速度がどのように変化するか定性的に述べよ。
- 1-2. 地殻の厚みは地域によって異なり、海洋域では平均約 7 km, 大陸域では平均約 30 km である。一方で海底と大陸の平均的な標高差は約 4 km であり、地殻の厚みの差ほど大きくはない。その理由についてアイソスタシーの考えに基づき定性的に述べよ。
- 1-3. 外核が液体であることはどのようにしてわかるか説明せよ。
- 1-4. 内核と外核が主に鉄からできていると考えられる根拠を 3 つ挙げ、それぞれ簡潔に説明せよ。

問 2 北太平洋の亜熱帯循環と、ダーウィン、タヒチの位置を記入した地図を図 2 に示す。以下の問に答えよ。

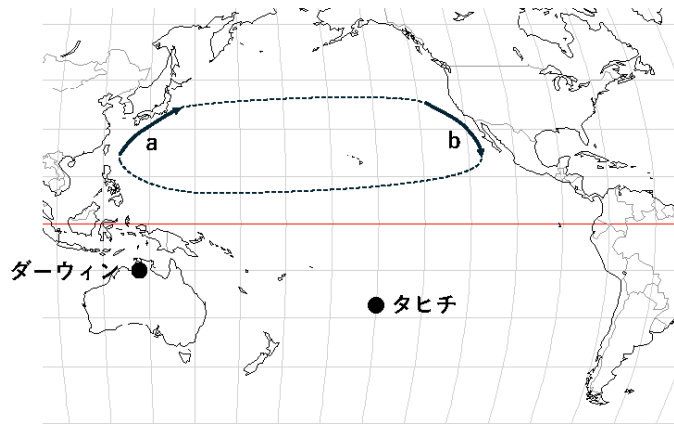


図 2 北太平洋の亜熱帯循環とダーウィン、タヒチの位置。

2-1. 海流 a の名称を答えよ。

2-2. 亜熱帯循環が生じる仕組みを以下の語句を全て用いて説明せよ。適宜模式図を交えても良い。

偏西風, 貿易風, コリオリ力, エクマン輸送, 岸

2-3. 海流 a, b のうち, 水平流速がより大きいのはどちらか, 記号で答えよ。

2-4. 海流 a, b 間の水平流速差が生じる仕組みを説明せよ。

2-5. エルニーニョ現象が発生すると, 地表面気圧が平年値より上昇する傾向があるのはダーウィンかタヒチか答えよ。また, そうなる理由も簡潔に述べよ。

2-6. エルニーニョ現象の発生時に, 太平洋高気圧の日本列島への張り出しは弱まる傾向か, 強まる傾向か答えよ。また, そうなる理由も簡潔に述べよ。

問 3 太陽, 太陽近傍の恒星, および見かけの明るい恒星のヘルツシュプルング・ラッセル図 (HR 図) を図 3 に示す。以下の問に答えよ。

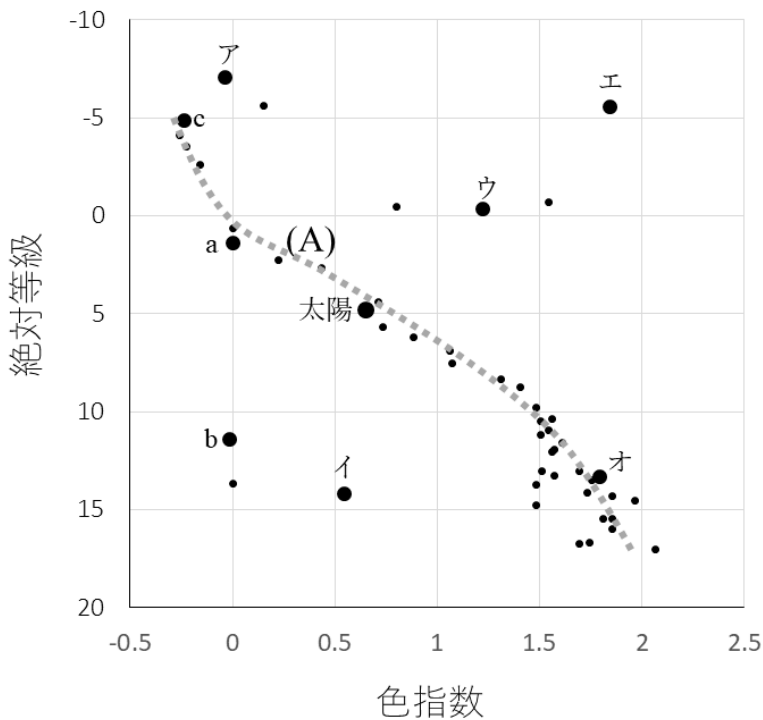


図 3 HR 図。色指数は B バンド等級と V バンド等級の差を表す。

- 3-1. 絶対等級は星の光度を対数スケールで表したもので、値が 5 等異なると、光度は 100 倍異なる。絶対等級が 1 等小さくなるごとに、光度は何倍になるか。有効数字 2 桁で求めよ。
- 3-2. 点線 (A) に沿って並んでいる星は、主系列星と呼ばれる。主系列星が輝く仕組みを、赤色巨星との違いが分かるように説明せよ。
- 3-3. 図 4 に恒星の色指数と表面温度の関係を示した。巨星のベテルギウスの表面温度は 3500 K である。これらを参考に HR 図上でベテルギウスを示す点を記号ア-オから選べ。
- 3-4. 星 a と星 b の等級差はほぼ 10 等である。このとき星 a の半径に対し星 b の半径はおおよそ何分の 1 か答えよ。導出過程も記せ。
- 3-5. 星 b はどのような種類の恒星か、その総称を答えよ。
- 3-6. 星 c と太陽との等級差は約 10 等である。星 c の質量は太陽質量のおよそ何倍か答えよ。ただし、主系列星の光度は質量の 4 乗に比例するものとする。導出過程も記せ。
- 3-7. 星 c のおおよその寿命を求めよ。ただし、太陽の寿命を 100 億年とする。導出過程も記せ。

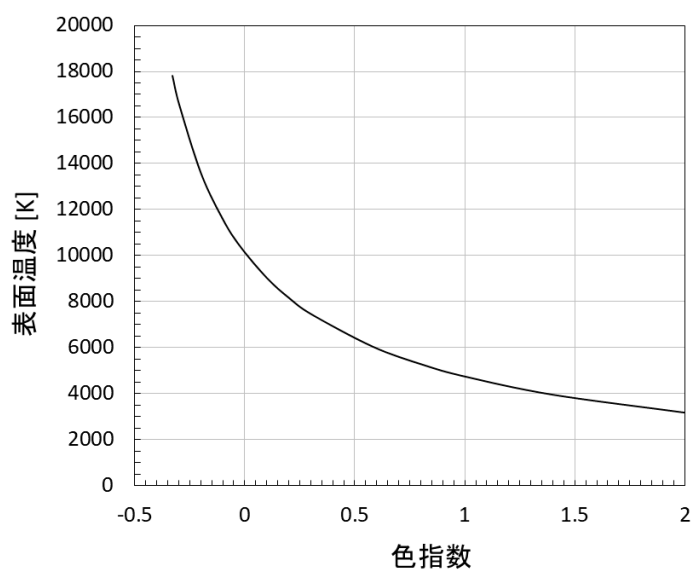


図 4 恒星の色指数と表面温度の関係。