

SPMODEL 群の一環としての 回転球殻 MHD ダイナモの数値モデルの構築

**Construction of a numerical model for MHD dynamo in rotating spherical shell as
a member of SPMODEL library**

佐々木 洋平

北海道大学 理学研究科 地球惑星科学専攻

本日の御品書

1. 始めに

- ▷ 天体固有磁場の多様性 (と言うか, そもそもの佐々木の動機)
- ▷ 数値計算による研究の現状
- ▷ 問題点 (?)

2. 本研究の目的

3. モデル設定

- ▷ 系の設定・支配方程式系
- ▷ 数値解法
- ▷ SPMODEL での処方箋

4. 実験設定

5. 結果

- ▷ ダイナモベンチマークとの比較
- ▷ 図集...流れ場・温度場・磁場 etc.

6. まとめと今後の課題

1 始めに (1)

天体固有磁場の多様性

- ▷ 固有磁場を持つ主な天体 (Stevensen, 2002)
 - 双極子成分が卓越した固有磁場を持つ天体
太陽, (多分) 水星, 地球, 木星, 土星, ガニメデ
 - 非双極子型の固有磁場を持つ天体
天王星, 海王星
 - 地殻の永久磁化による小さな固有磁場を持つ天体
月, 火星, 金星 (?)
- ▷ 天体固有磁場の生成維持機構

天体内部の流体運動によるダイナモ作用

佐々木の興味:

『各天体固有磁場の多様性を理解したい』

→ 数値実験を通しての理解が必要. モデルを作らなきゃ!!

1 始めに (2)

数値実験による研究の現状

- ▶ 計算機性能の向上に伴い，数値実験が活発に行われつつある．
 - 最初の MHD ダイナモ計算: Glatzmaier, 1984(太陽ダイナモ)
 - 地球の MHD ダイナモ計算: Glatzmaier & Roberts, 1995
 - ：
 - MHD ダイナモのベンチマークテスト: Christensen et al., 1999
- ▶ 自励的 (self-excited) な磁場生成が再現されている．
 - 周期的に極性を反転するダイナモ (太陽っぽい)
 - 非周期的に極性を反転するダイナモ (地球っぽい)
 - 磁場のパターンが西方移動するダイナモ (地球っぽい)...etc.
- ▶ 物性，境界条件等の物理過程を変更した計算も行われている．
 - 成層・圧縮性・非一様熱源，境界条件...etc.

1 始めに (3)

問題点 (?)

▷ 計算機性能の限界

- 扱えるパラメタは現実と程遠い!
- 並列化による hyper 計算 .
- sub-grid scale のパラメタ化 .

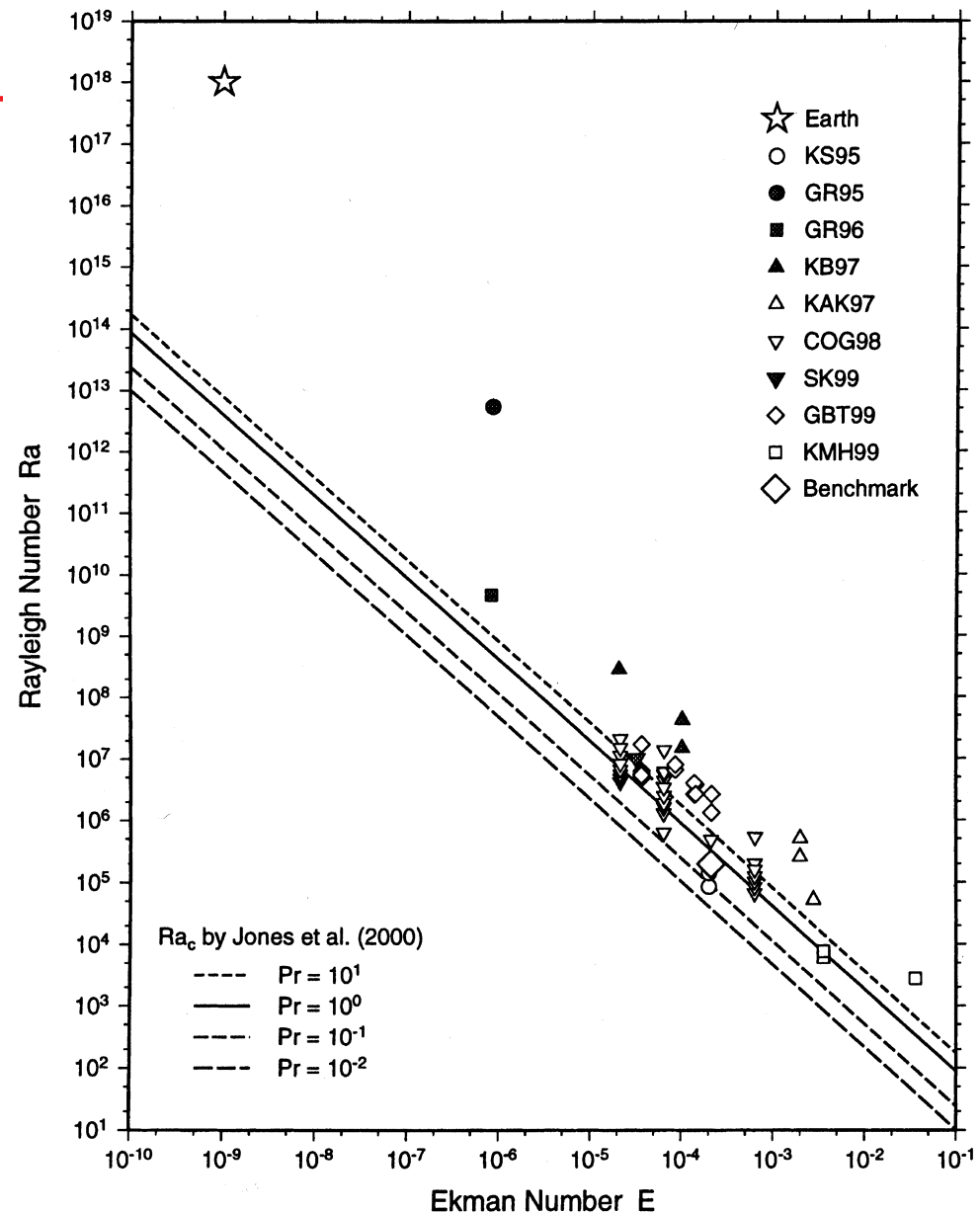
そのために

力学構造の把握する必要性

- ・ パラメタスタディ
- ・ 系を簡略化した縮小モデルの使用

これらの実現のためには

可読性・可変性の高いモデル
があると便利.



各数値実験でのパラメタ設定 (Kono & Roberts, 2001)

2 本研究の目的

可変性・可読性に優れる数値モデルの構築

- ▷ SPMODEL 上に構築する事で実現
 - 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (竹広ら, 2002).
地球流体電脳倶楽部 SPMODEL 開発グループが開発中のライブラリ.
 - ISPACK(数値計算コア) + gtool4/Fortran90 ライブラリ (I/O)
 - Fortran90 の配列計算機能の活用

SPMODEL ライブラリの性能試験

- ▷ これまで作成したのは 1 次元 ~ 2 次元の簡単な方程式系のモデル.
 - 大規模な 3 次元数値モデル構築に使用したことはなかった.
- ▷ SPMODEL を用いて回転球殻 MHD ダイナモの数値モデルを構築
- ▷ ダイナモベンチマークの設定で計算を実行
 - 結果を比較する事でモデルの信頼性を検証する.

3 モデル設定 (1):系の設定

支配方程式系:回転系でのブシネスク磁気流体の方程式系

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$E \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right\} + 2\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p + Ra \frac{\mathbf{r}}{r_o} T + \frac{1}{Pm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T.$$

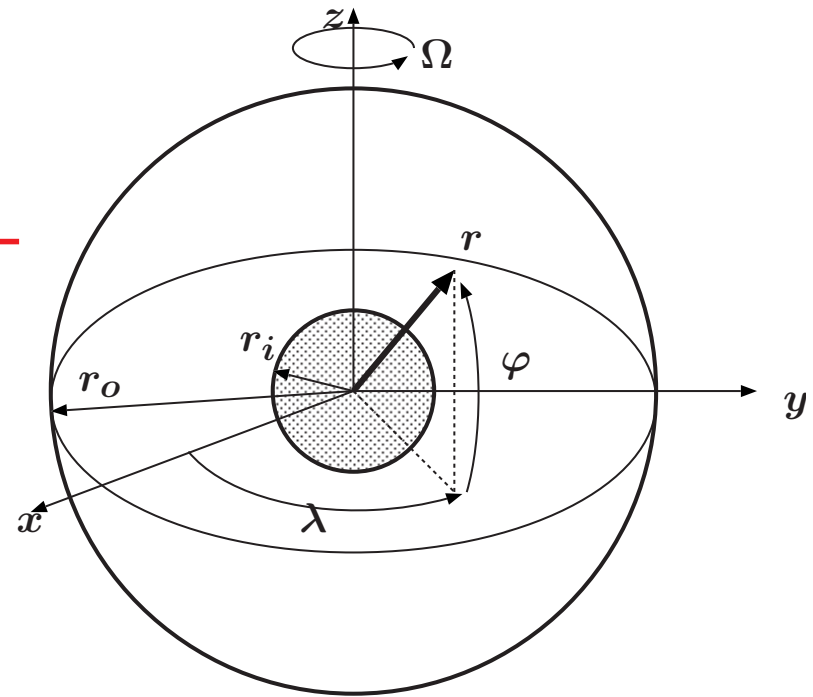
モデル中の無次元数

修正レイリー数 $Ra = \frac{\alpha g_o \Delta T D}{\nu \Omega}$

エクマン数 $E = \frac{\nu}{\Omega D^2}$

プラントル数 $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

磁気プラントル数 $Pm = \frac{\nu}{\eta}$



3 モデル設定 (2):数値計算法

速度場, 磁場をトロイダル-ポロイダルポテンシャルで表現

- ▷ 連続の式, 磁場のソレノイダル条件を自動的に満たす形に方程式系を変形する

空間微分の評価は擬スペクトル法で行なう

- ▷ 水平方向は球面調和関数で展開
 - 三角形波数切断
 - 逆変換はガウスの台形公式 + ガウス-ルジャンドルの積分公式
- ▷ 鉛直方向はチェビシェフ多項式で展開
 - 格子点の設定・境界条件の適用は選点法

時間積分は semi-implicit 法で行なう

- ▷ 拡散項以外は Adams-Bashforth 法
- ▷ 拡散項は Crank-Nicolson 法

3 モデル設定 (3):SPMODEL での処方箋

空間微分演算子をモジュール化

- ▷ Fortran90 の「配列を返す関数を定義できる」機能を利用
- ▷ 流体数値計算ライブラリ ISPACK(石岡, 2002) を空間微分計算に利用

⇒ プログラムを数式の如く記述できる.

例 1: 温度場の時間変化を Euler scheme で解く場合

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T - (\mathbf{u} \cdot \nabla) T$$

```
wt_Temp = wt_Temp + dt * ( \&  
    1/Pr * wt_Lapla_wt(wt_Temp) \&  
    - wt_Div_xyz_xyz_xyz(  
        xyz_Vlon*xyz_Temp, xyz_Vlat*xyz_Temp, xyz_Vrad*xyz_Temp \&  
    ) \&  
)
```

データの出力・表示には gtool4 を使用

- ▷ 自己記述的 (データ自体に, 何者であるかの情報を追加)
- ▷ データを NetCDF 形式で出力する事で可搬性を確保
- ▷ 最低限の可視化は容易に行なえる

4 実験設定 (1): 境界条件・無次元数・解像度

境界条件

- ▷ 速度場: 粘着条件 (境界で速度 = 0)
- ▷ 温度場: 球殻境界での温度を固定
- ▷ 磁場: 磁場無し (case0) or 球殻内外は不導体 (case1)

無次元数の設定

- ▷ $Ra = 100$, $E = 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 5$

解像度の設定

行なった計算と用いた計算機. 全水平波数を T , 鉛直波数を N として各々,

- ▷ T21N16: PC/AT 互換機 (Athlon MP1600+ 二機搭載) を使用
- ▷ $\left. \begin{array}{l} T21N32 \\ T42N32 \end{array} \right\}$ 国立天文台の富士通 VPP5000 を使用

4 実験設定 (2): 初期条件の設定

- ▷ 速度場: 静止状態
- ▷ 温度場: 熱源無し, 温度固定条件での熱伝導解 + 東西波数 4 の擾乱

$$T = \frac{r_o r_i}{r} - r_i + \frac{21}{\sqrt{17920\pi}} \times (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) \cos^4 \varphi \cos 4\lambda, \quad (x = 2r - r_i - r_o)$$

- ▷ 磁場: 双極子磁場 + 軸対称トロイダル磁場

$$B_\lambda = 5 \sin\{\pi(r-r_i)\} \sin 2\varphi, \quad B_\varphi = \frac{5}{8} \left(9r_o - 8r - \frac{r_i^4}{r^3} \right) \cos \varphi, \quad B_r = \frac{5}{8} \left(8r_o - 6r - 2\frac{r_i^4}{r^3} \right) \sin \varphi.$$

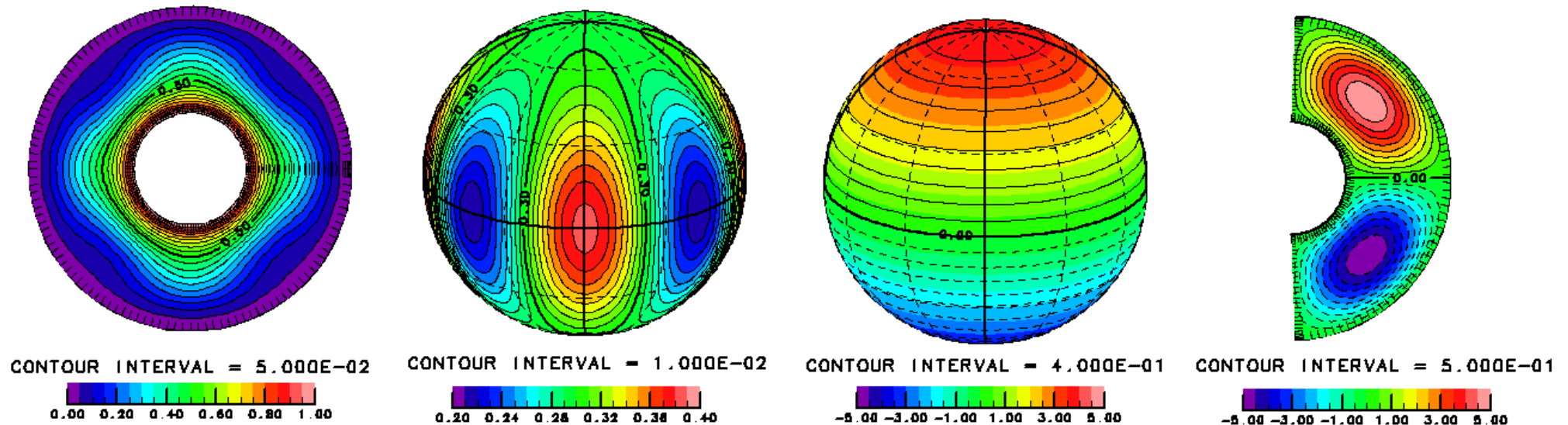


図 2: 初期値の分布. 右から, 温度場赤道断面, 温度場球殻中点, 磁場球殻表面, 磁場子午線断面.

5 ダイナモベンチマークとの比較 (1):

比較した量

▷ ダイナモベンチマークでは, パターンが東 (西) に伝播する準定常解が得られる.

▷ 基準解として示されているのは次の物理量:

球殻全体での平均運動エネルギー $E_{kin} = \frac{1}{2} \int_{V_s} \mathbf{u}^2 dV$

平均磁気エネルギー $E_{mag} = \frac{1}{2EP_m} \int_{V_s} B^2 dV$

パターン伝播の振動数 ω

温度 T

東西流 u

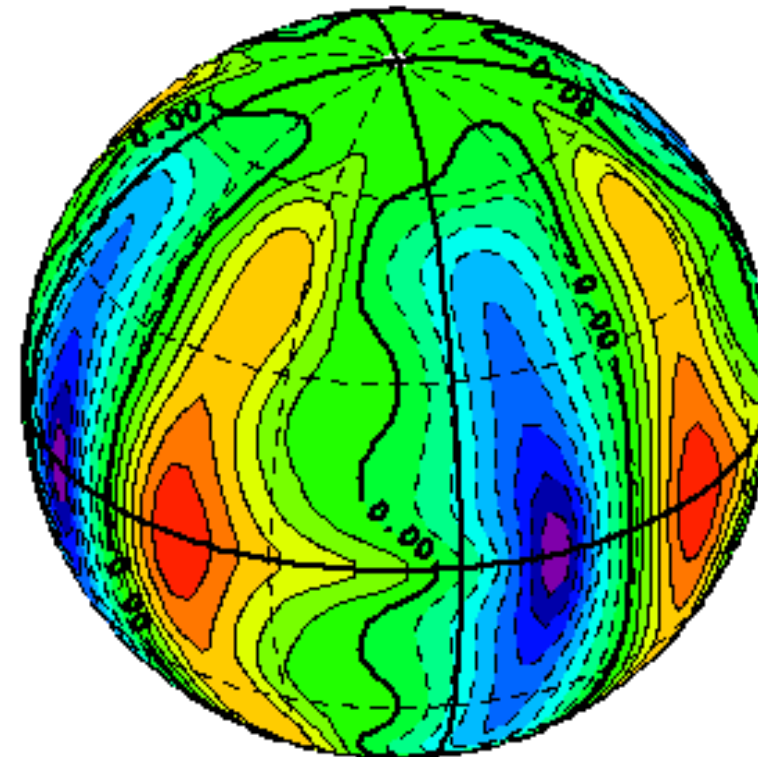
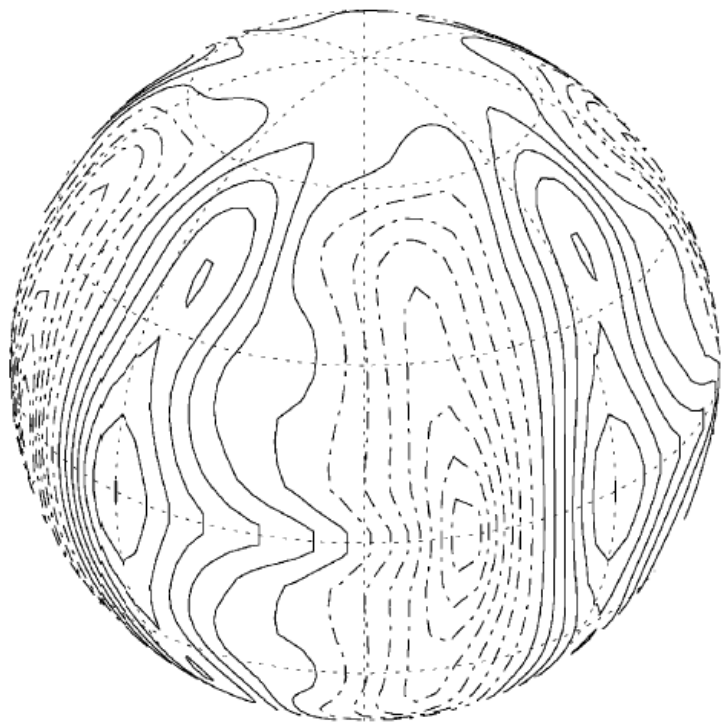
トロイダル磁場 B_φ

▷ ただし, 温度 T , 東西流 u , トロイダル磁場 B_φ は
球殻中点の赤道上的における対流セルの境界 ($w = 0, \partial w / \partial \lambda > 0$) での値

5 ベンチマークとの比較 (2): 空間構造の比較

流れ場の比較

球殻中層での流れ場の様相．左：ベンチマーク，右：本計算．等値線間隔は 2.0



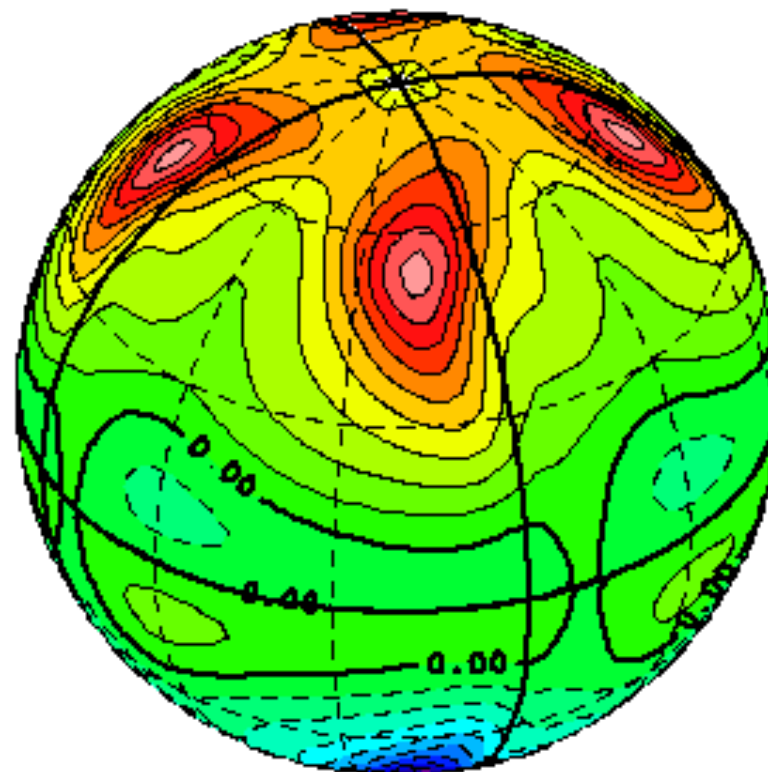
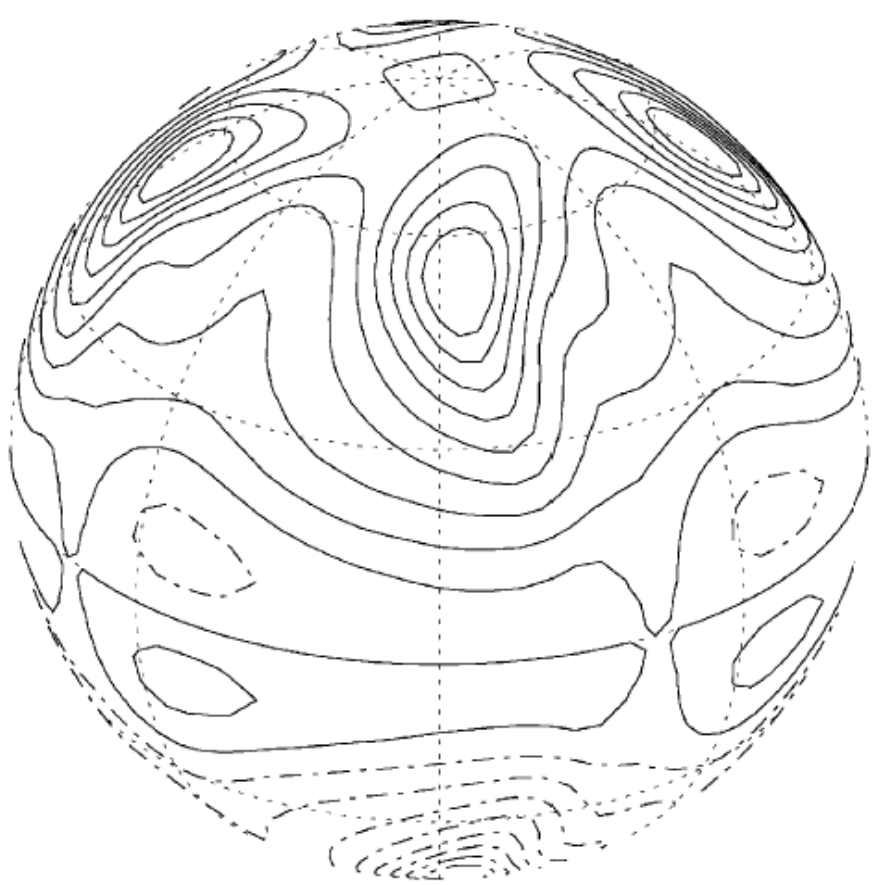
CONTOUR INTERVAL = 2.000E+00



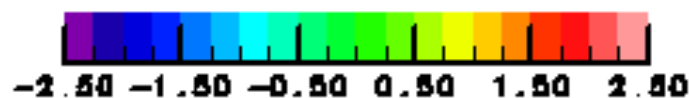
5 ベンチマークとの比較 (3): 空間構造の比較

磁場の比較

球殻表面での磁場の様相．左：ベンチマーク，右：本計算．等値線間隔は 0.25



CONTOUR INTERVAL = 2.500E-01



5 ベンチマークとの比較 (4): 数値の比較

case0 の比較結果

	E_{kin}	T	u	ω
case0-ベンチマーク	58.348	0.42812	-10.1571	0.1824
case0-T21N16	57.713	0.42353	-10.8958	0.1893
case0-T21N32	58.138	0.43638	-10.7235	0.1965
case0-T42N32	58.281	0.42736	-10.1658	0.1835

▷ ベンチマークと非常に良く一致 (T42N32 で $\pm 0.02\%$ 以内)

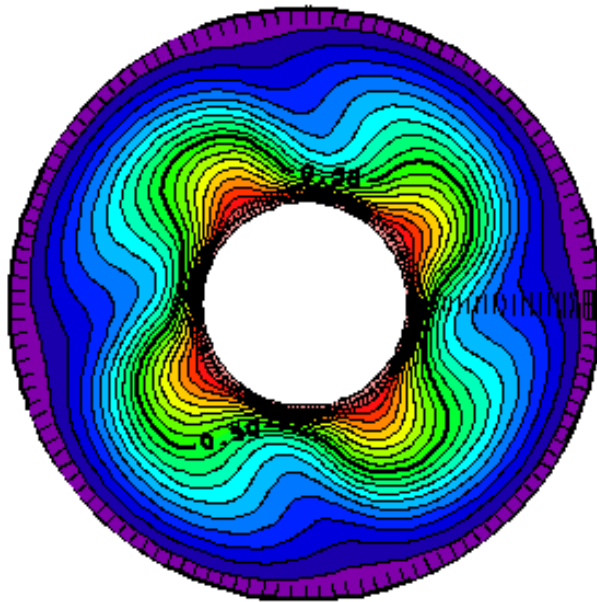
case1 の比較結果

	E_{kin}	E_{mag}	T	u	B_φ	ω
case1-ベンチマーク	30.733	626.41	0.37338	-7.6250	4.9283	-3.1017
case1-T42N32	29.862	607.53	0.37461	-7.6726	4.8016	-3.1373

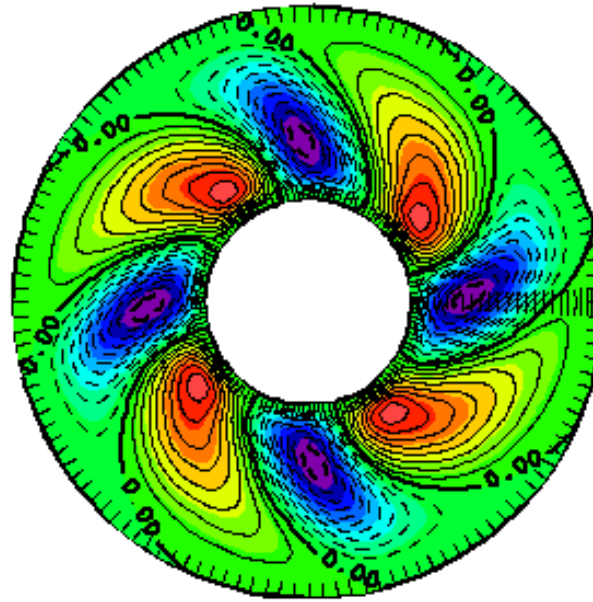
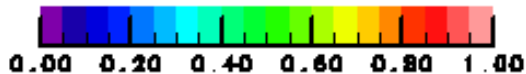
▷ E_{kin}, E_{mag} の差が目立つ. もう少し収束するはず.

5 対流構造の比較 (1): case0

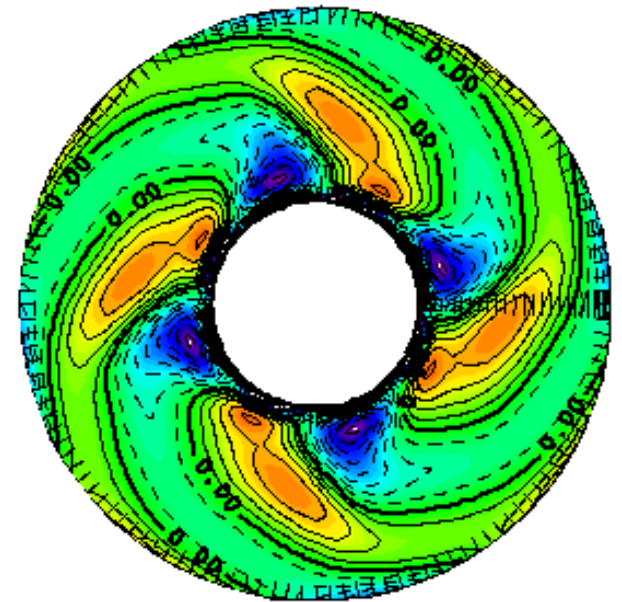
赤道断面での温度場・鉛直流・渦度 (緯度成分)



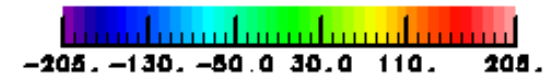
CONTOUR INTERVAL = $5.000E-02$



CONTOUR INTERVAL = $1.500E+00$



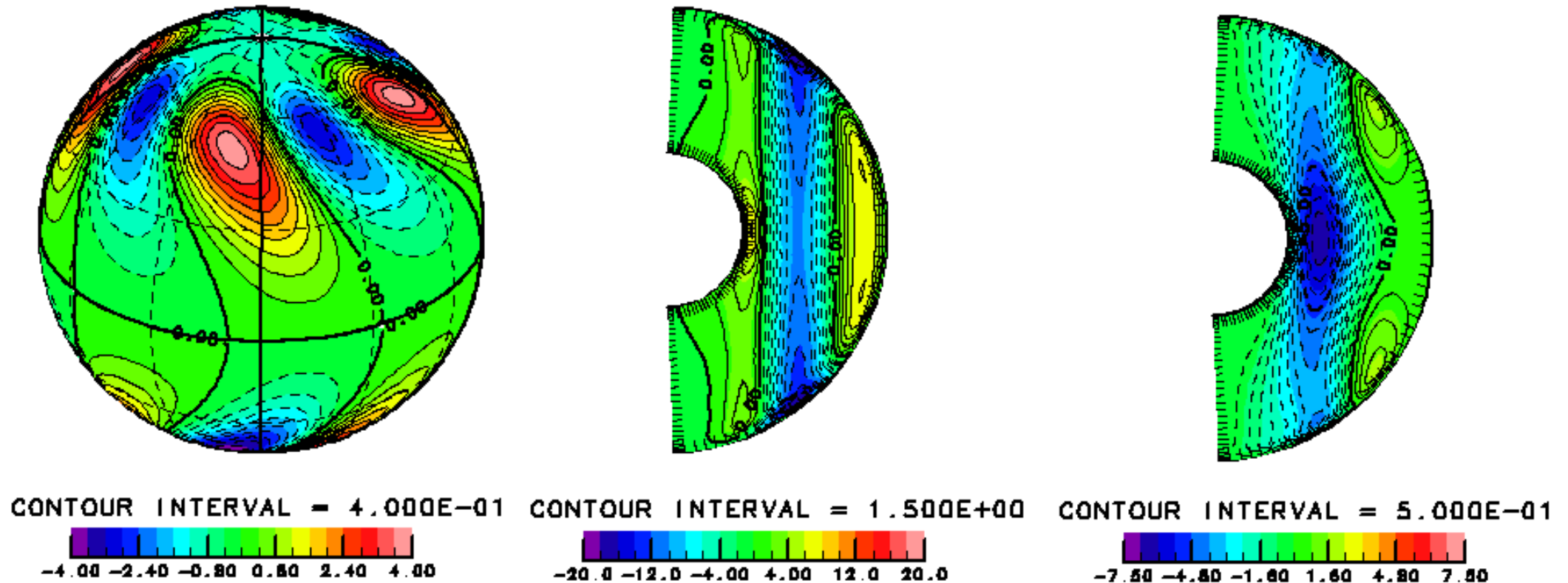
CONTOUR INTERVAL = $2.500E+01$



- ▷ 東西波数 4 のモード
- ▷ 球殻外部ほど対流セルが東に傾く螺旋状パターンが形成.
- ▷ パターンは東向きへ伝播.

5 対流構造 (1): case0

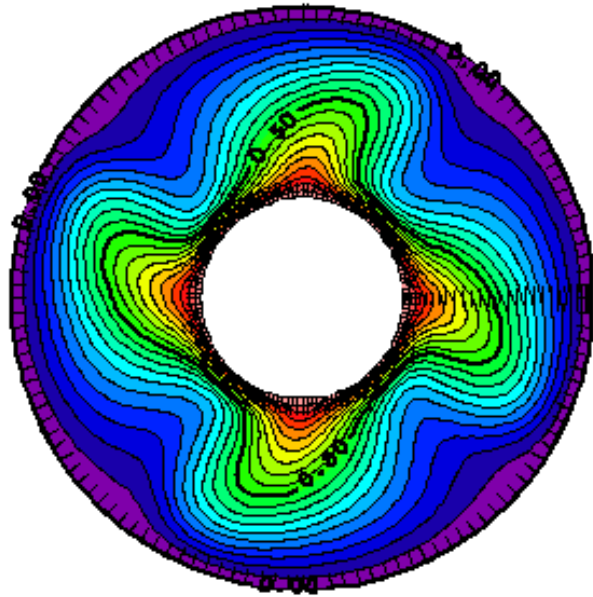
球殻表面付近での流線・東西流 (子午面)・帯状平均東西流



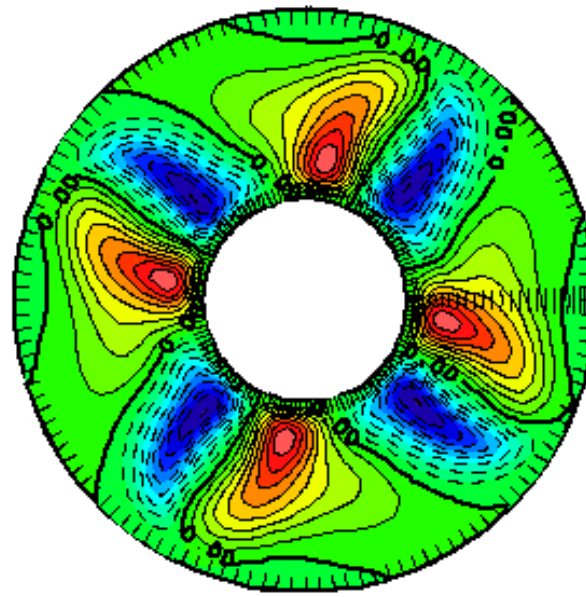
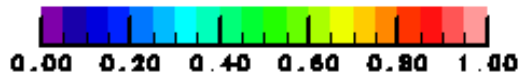
- ▶ 螺旋状パターンが球殻表面付近まで達している.
- ▶ 流れは回転軸方向にそろっている テイラー柱が形成
- ▶ 帯状平均東西流は, 内球の赤道付近で強い東風

5 対流構造 (2): case1

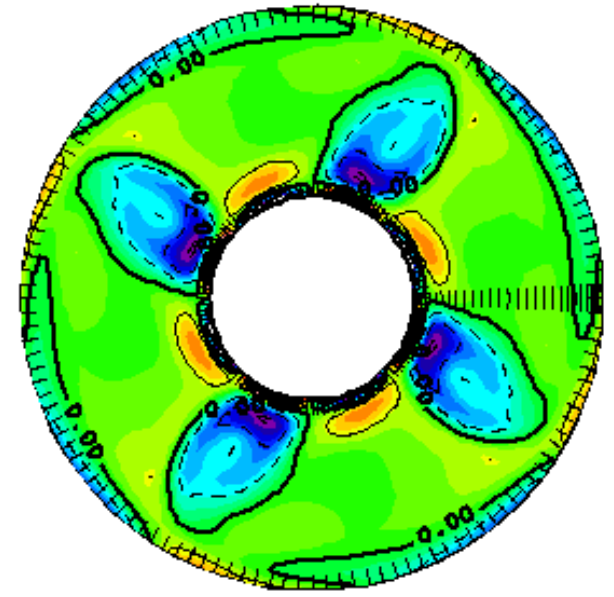
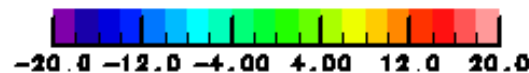
赤道断面での温度場・鉛直流・渦度 (緯度成分)



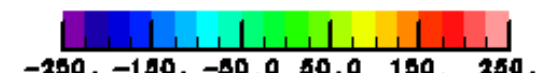
CONTOUR INTERVAL = $5.000\text{E-}02$



CONTOUR INTERVAL = $2.000\text{E}+00$



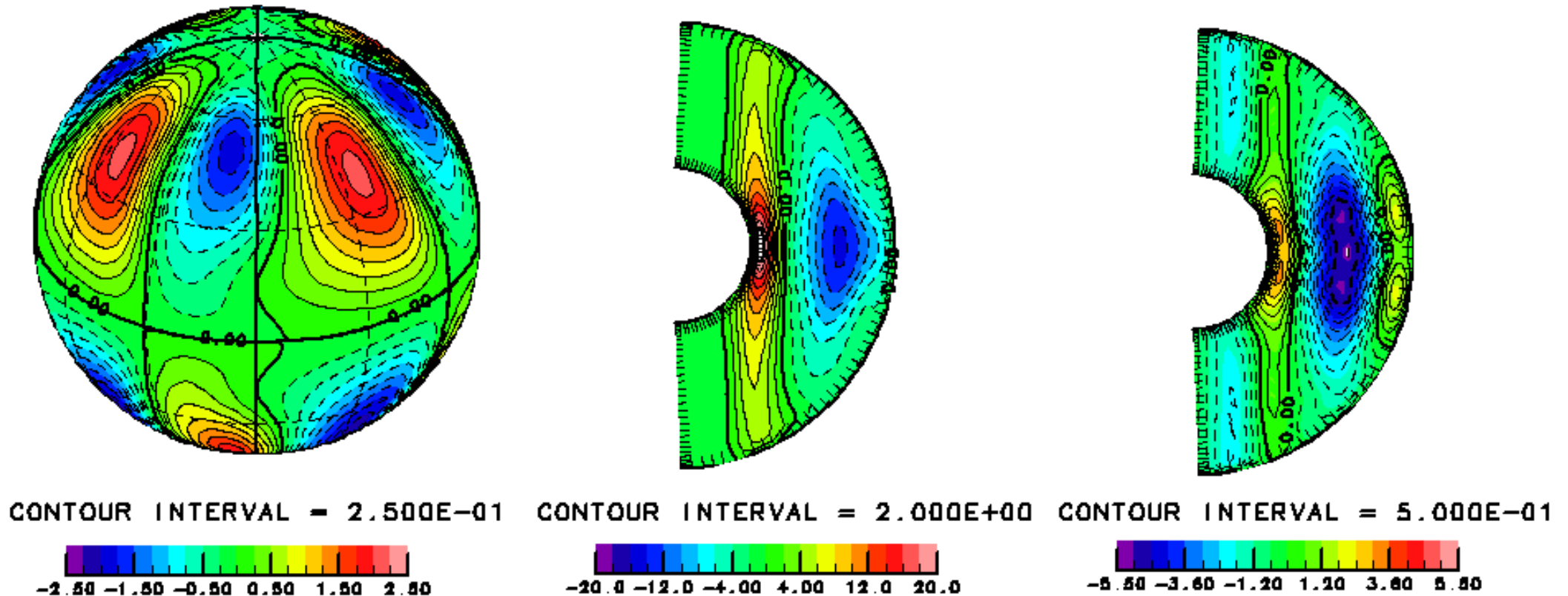
CONTOUR INTERVAL = $8.000\text{E}+01$



- ▷ 東西波数 4 のモード case0 と同じ
- ▷ 負の渦柱が 4 つ局在している
- ▷ パターンは西向きへ伝播.

5 対流構造 (3): case1

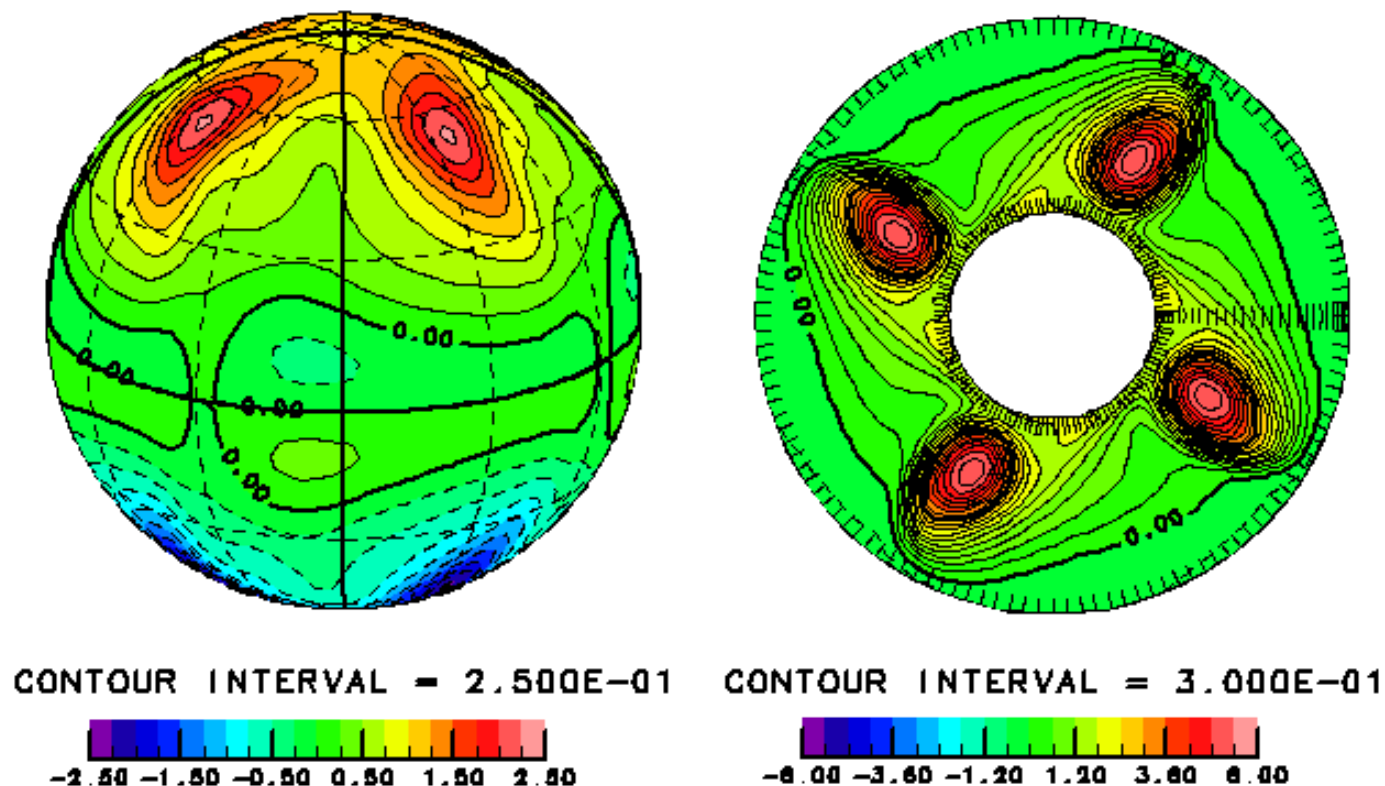
球殻表面付近での流線・東西流 (子午面)・帯状平均東西流



- ▶ 負の渦柱は球殻表面付近まで達している
- ▶ 流れはやはり回転軸方向へ揃っている。 テイラー柱
- ▶ 帯状平均東西流は, 境界の赤道付近で西風, 球殻内部で東風

5 磁場の構造 (1): case1-ポロイダル磁場

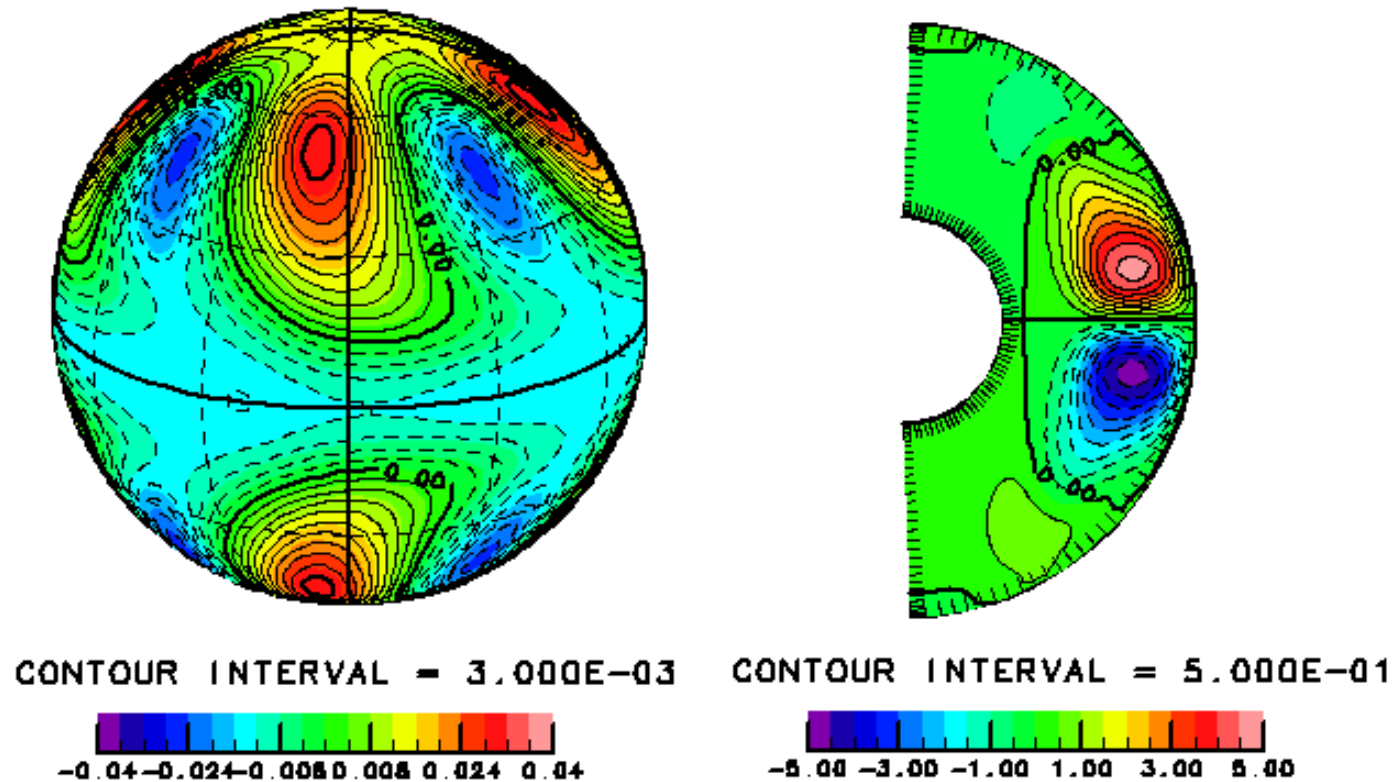
球殻上部境界付近と赤道断面



- ▷ 双極子型 + 東西波数 4 の構造
- ▷ 負の渦柱の内部に集中

5 磁場の構造 (2): case1-トロイダル磁場

球殻上部境界付近の磁力線と子午面断面



- ▷ 渦柱に巻きついているように見える.
- ▷ 赤道表面近くで値が大きい.

6 謝辞・参考文献

参考文献

- 1 Chirstensen, U., Aubert, J., Cardin, P., Dormy, E., Gibbuns, S., Glatzmaier, G.A., Grote, E. Honkura, Y., Jones, C.A., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J. and Zhang, K., 2001: A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25–34.
- 2 Kono, M. and Roberts, P.H., 2001: Definition of the Rayleigh number for geodynamo simulation. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 13–24.
- 3 竹広真一, 1994: 回転球殻ブシネスク対流～赤道加速に関する考察. 博士論文, 東京大学大学院理学系研究科地球惑星物理学専攻.
- 4 竹広真一, 石岡圭一, 豊田英司, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2002: 『階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL)』., 地球流体電脳倶楽部, <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel>.
- 5 豊田英司, 石渡正樹, 竹広真一, 林祥介, 開発グループ, 2002: 『gtool4 Fortran90 ツール・ライブラリ』., 地球流体電脳倶楽部, <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel>.
- 6 石岡圭一, 2002: ispack-0.61, 地球流体電脳倶楽部. <http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/>,

謝辞

本研究は文部科学省国立天文台大規模シミュレーションプロジェクト (カテゴリ C, ID: myh76c) に採択され, 本研究における数値シミュレーションは文部科学省国立天文台天文学データ解析センターの富士通 VPP5000 を用いて行われた.