M ゼミ

地球外核における対流とブシネスク近似(その 1)

佐々木 洋平

北海道大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻

地球惑星流体科学講座 地球流体力学研究室 修士課程 1 年

平成 13 年 6 月 21 日

目 次

参考文献

Braginsky, S.I., and Roberts, P.H., 1995: Equations governing convection in earth's core and the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **79**, 1–97.

Spiegel, E.A., and Veronis, G., 1960: On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Ap. J.*, **131**, 442–447.

小高正嗣, 1990: 非弾性方程式系とブスネスク近似. GFD ノート.

木村竜治, 1983: 地球流体力学入門. 気象学のプロムナード 13, 東京堂出版.

1　本ゼミの目的

地球ダイナモ (以下単にダイナモとする) についての殆どの研究が, 磁場と流れの支配方程式系をブシネスク系[1]として議論を始めている.

ブシネスク近似とは, 簡単に言うと非圧縮ではあるが運動方程式における浮力の項には密度変化を残す近似である. この近似では

- 基準状態では流体が殆ど断熱的であること (ほぼ等温位大気であること)
- 音速が他の速度の大きさに比して非常に大きいこと
- 系の鉛直スケールがスケールハイトに比して十分小さいこと (=浅い対流であること)

の 3 つを仮定している. それに加えて

- 密度や圧力などの量の基準状態からのずれはとても小さい

を仮定している. 最後の仮定はいわゆる「答えを見てから正当性がわかる」仮定である. 乾燥空気や水, 水銀などについては実験からこの仮定が十分良い近似であることが知られている.

しかし, 地球外核についても上記の仮定をして良いのかについての議論はいままで殆どなされていない. 大抵は「ダイナモの方程式系は…である」と言い切っている.

以上の観点から, 地球外核が熔融鉄と微量の軽元素との化合物であるとしてダイナモの支配方程式系について議論した Braginsky and Roberts(1995) を読んでいたのだが, そもそもブシネスク近似と非弾性近似について良くわかっていないことが判明した. よって今回の M ゼミではブシネスク近似・非弾性近似について整理し, 次回以降で具体的に地球外核の対流について考察することにする.

[1]一般に, ブシネスク近似を用いた流体をブシネスク流体, その支配方程式系をブシネスク系と言う (木村, 1983)

2 ブシネスク系の導出:重力場中にある流体

この節[2]では外力として重力のみがはたらく流体のブシネスク系を導出する. 議論の出発点となる方程式系を以下に記す.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho \mathbf{u}) &= 0, & (1)\\
\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right] &= -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla\cdot\overline{\sigma}, & (2)\\
\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)s\right] &= k\nabla^2 T + \overline{\sigma}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathcal{Q}. & (3)
\end{aligned}
$$

記号の定義

- $\mathbf{u}$： 速度ベクトル. 成分毎に書くと $\mathbf{u} = (u, v, w)$
- $\overline{\sigma}$： 粘性テンソル.
- ρ, T, s, p： 単位質量当たりの体積 (比体積), 温度, エントピー, 圧力.
- $\mathbf{g}$： 重力加速度ベクトル. ここでは一定であるとする.
- k：熱伝導率. ここでは定数であるとする.
- $\mathcal{Q}$: 内部熱源.

これに加えて状態方程式により, 熱力学量を 2 つ決定することでその他の熱力学量を求めることができる.

2.1 熱輸送の式

熱輸送の式 (3) を温度の式に書き直す. エントロピー s を

$$s = s(p, T) = s(p(\rho, T), T) = s(\rho, T)$$

として, ρ と T の関数であると考えれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial t} &= \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho \frac{\partial T}{\partial t}\\
&= -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t}\\
&= -\frac{1}{\rho^2}\frac{\alpha}{\kappa}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{c_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t} & (4)
\end{aligned}
$$

[2] ここの内容は主に Spiegel and Veronis(1960) による.

よってこれを熱輸送の式 (3) に代入し, 連続の式 (1) を用いることで,

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha}{\kappa} T \nabla \cdot \mathbf{u} = k \nabla^2 T + \overline{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathcal{Q}. \tag{5}$$

が得られる.

2.2 基本となる仮定

熱力学的諸量を一般に f で表すものとする. f を以下の 3 成分に分離する.

$$f(x, y, z, t) = f_m + f_h + f'(x, y, z, t) \tag{6}$$

記号の定義

- f_m： 熱力学量 f の空間平均. 一定である
- f_h： 熱力学量 f の静止状態 (= 静水圧平衡状態) での変動.
- f'： 熱力学量 f の流体運動によって発生する変動.

基準状態として静止状態 (=静水圧平衡状態) をとると,(2) より,

$$0 = -\nabla p_h + (\rho_m + \rho_h)\mathbf{g} \tag{7}$$

が成立する. ここで上の式の回転をとることで,

$$0 = (\nabla \times \rho_h) \times \mathbf{g} \tag{8}$$

が得られる. つまり静止状態での等密度面は等重力面と一致する. このことより等重力面上では密度は一定であり, その結果圧力も一定であることがわかる. よって等重力面上では全ての熱力学量が一定であることが, つまり静止状態での熱力学量は鉛直方向にのみ依存することがわかる. よって,

$$f_h = f_h(z)$$

であるとする.

ここで以下の条件を仮定する.

系の鉛直スケール D が, 熱力学量の静止状態成分 f_h の変動スケールよりも十分小さい.
すなわち,

$$D \ll \frac{f_h}{\left(\frac{\partial f_h}{\partial z}\right)} \tag{9}$$

この仮定の意味を考えてみる. ここでは熱力学量を密度とする. 密度の静水圧成分を流体層全域にわたって鉛直に積分した場合の変化を $\Delta\rho_h$ とすると

$$\Delta\rho_h = \left|\int_0^D \frac{\partial\rho_h}{\partial z}\,dz\right| \ll \frac{1}{D}\left|\int_0^D \rho_h\,dz\right| = \rho_m$$

である. よって (9) の意味するところは,

$$\frac{\Delta\rho_h}{\rho_m} \equiv \varepsilon \ll 1$$

である. これは考えている系では静水圧成分の変動が殆ど無視できることを意味している.

微小振幅の流れを考えている場合には必要の無い仮定であるが, 有限振幅の流れを取り扱うため, さらに以下の条件を仮定する.

熱力学量の変動成分 f' は空間平均量 f に比べて十分小さい. すなわち,

$$\left|\frac{f'}{f_m}\right| \leq \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (10)$$

この仮定が正しいか否かは解が得られて始めてわかる. しかし実験により密度の変動成分の大きさは $\Delta\rho$ を越えないことが示唆されている. よって (9) が成り立つ場合には (10) も成り立つとして良い.

以上の議論は密度についてのみ行われたが, 圧力, 温度についてもそのまま成立する.

2.3 状態方程式の変形

仮定 (9),(10) を元に状態方程式を変形する. まず静止状態での密度の変動について考える.

$$\rho = \rho(T, p)$$

である. $\rho_m(T_m, p_m)$ を基準にして ρ を展開する.

$$\begin{aligned}\rho(T,p) &= \rho_m(T_m,p_m) + \left(\frac{\partial\rho_m}{\partial T}\right)_p (T-T_m) + \left(\frac{\partial\rho_m}{\partial p}\right)_T (p-p_m) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\rho_m}{\partial T^2}\right)_p (T-T_m)^2 + \left(\frac{\partial^2\rho_m}{\partial p^2}\right)_T (p-p_m)^2 + \frac{\partial^2\rho_m}{\partial p\partial T}(p-p_m)(T-T_m)\right] + \cdots\end{aligned}$$

ここで (9) より,

$$\frac{\rho_h}{\rho_m} = -\alpha_m T_h + \kappa_m p_h + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \qquad (11)$$

となる. 添字 m は平均量を表す. 上式より変動成分は,

$$\frac{\rho'}{\rho_m} = -\alpha_m T' + \kappa_m p' + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{12}$$

となる.

2.4 静止状態の分離

静止状態は (2) 及び (5) より,

$$0 = -\nabla p_h + (\rho_m + \rho_h)\mathbf{g}, \tag{13}$$
$$0 = k\nabla^2 T_h + \mathcal{Q}. \tag{14}$$

となる.

(2) より (13) を引くことで

$$\rho\Big[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\Big] = -\nabla p' + \rho'\mathbf{g} + \nabla\cdot\overline{\sigma} \tag{15}$$

また, (5) より (14) を引くことで

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \frac{\alpha}{\kappa} T\nabla\cdot\mathbf{u} = k\nabla^2 T' + \overline{\sigma}\cdot\nabla\mathbf{u} \tag{16}$$

となる.

2.5 運動方程式と連続の式

仮定 (9),(10) を元に連続の式と運動方程式を変形する. (1) より,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\rho \\
&= \frac{d}{dt}\log\rho \\
&= \frac{d}{dt}\log\rho\Big(1 + \frac{\rho_h + \rho'}{\rho_m}\Big) \\
&\sim \frac{d}{dt}\log\Big(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_m}\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{17}$$

が得られる. また, (2) より,

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho_m \left(1 + \frac{\rho_h + \rho'}{\rho_m}\right) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= \rho_m \Big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\Big) \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ \rightarrow \Big(1 + \mathcal{O}(\varepsilon)\Big) \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_m} \nabla p + \frac{\rho'}{\rho_m} \mathbf{g} + \frac{1}{\rho_m} \nabla \cdot \overline{\sigma} \end{aligned} \tag{18}$$

この鉛直成分を考えることで

$$-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_m} g = -\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p'}{\partial z} - \kappa_m p' g + \alpha_m T' g \tag{19}$$

が得られる. ここで静水圧の式 (13) より

$$\frac{\Delta p_h}{D} \sim \rho_m g, \tag{20}$$

よって,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p'}{\partial z} - \kappa_m p' g + \alpha_m T' g &= -\frac{1}{\rho_m}\left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho_m \kappa_m p' g\right) + \alpha_m T' g \\ &= -\frac{1}{\rho_m}\left(\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\Delta p}{D} p'\right) + \alpha_m T' g \end{aligned} \tag{21}$$

…続く.