

# 論文読書ノート

Kuang, W., 1999:

## Force balances and convective state in the earth's core

佐々木 洋平

北海道大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻

地球惑星流体科学講座 地球流体力学研究室

修士課程 1 年

平成 13 年 10 月 17 日

## 目次

1	Introduction	3
2	Numerical model	6
3	Force balances in the core	9
4	The flow and the magnetic field in the core	16
5	Conclusion	24

## 要旨

本ノートは, Kuang, W., 1999: Force balances and convective state in the earth's core の読書ノートである.

## abstract の全訳

Kuang と Bloxham は Kuang and Bloxham (1997) において, 粘性の影響を導入したシミュレーションを行った. そこで得られた数値解は, 強磁場ダイナモであった.

本論文では, 外核での磁場, 対流構造, そして力のバランスが境界における粘性の影響によってどのように変わるかを詳細に議論した.

ダイナモ作用<sup>1</sup>が発生する領域は, 境界における粘性の影響に強く依存することがわかった. 粘性の影響が強い場合はダイナモ作用が発生する領域が内核境界付近 (inner core boundary, 以下 ICB) と接円筒 (外核を縦断し, 赤道で内核に接する円筒) の内部に限られていた. その一方で, 粘性の影響が無視できる場合にはダイナモ作用は外核全体で発生していた.

接円筒内部の流れは ICB における粘性の影響を強くうけるのに対して, 接円筒外部の流れは粘性の影響をあまりうけないことが定性的に明らかになった.

また, 粘性の影響が無視できる場合には, 接円筒表面においてローレンツ力による自転軸周りのモーメントと流体の慣性モーメントがバランスしていた. 結果として接円筒外部では強い帯状流 (差分回転) が発生していた.

接円筒内部の温度風と磁気風は ICB における粘性の影響を強くうけていた. 粘性の影響が強い場合には, 磁気風は温度風に比して小さかった. 温度風と磁気風は一方向にだけ流れており, 結果として帯状流は深さと共に強くなり, 内核の超回転 (super-rotation) が発生していた. 粘性の影響が無い場合には, 磁気風と温度風の大きさは同程度であった. それらの向きは深さと共に時間的にも変化していた. 結果として帯状流は不規則に変動し, 内核は振動していた.

---

<sup>1</sup>本文 "dynamo action". この言葉は最近になってよく用いられるようになった. 50 ~ 80 年代は "dynamo process" という言葉が主に使われている.

# 1 Introduction

地球ダイナモのモデリングについての最近の研究成果により、地球外核の流れの構造と地球の磁場生成メカニズムに関する我々の理解は急速に発展している (Glatzmaier and Roberts, 1995, 1996; Jones et al., 1995; Kuang and Bloxham, 1997, 1999; Wicht and Busse, 1997; Christensen et al., 1998). 最近のレビューとして、ここでは Fearn (1998) を参考にした。ダイナモの数値シミュレーションによって得られたポロイダル磁場と水平流は、地球表面における磁場の観測値から推定されるコア–マントル境界 (core–mantle boundary, 以下 CMB) での磁場と流れ場の様相と 一致する (Kuang and Bloxham, 1997)。

最近のシミュレーションにおいて、“観測結果と一致する”(一致するは言いすぎ?) と主張する場合

- CMB での磁場は双極子成分が (オーダ 1 つ以上) 卓越する。
- 磁場の様相はほとんど変化せず、ゆっくりと西向きにドリフトする。
- そのドリフトの向きを流れ場の向きとして考え、計算結果と照らしあわせている<sup>2</sup>。

しかしながら、地球表面での観測結果から得られる外核における磁場と流れについての情報は十分とは言えない。とはいえ、いくつかの研究によって

流れの構造は外核における力の釣合いによって決まる。これは地球と共に回転する系から見た運動方程式によって記述される。無次元化した運動方程式は以下で与えられる。

$$R_o \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} \right) + \mathbf{1}_z \times \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + R_{th} \Theta \mathbf{r} + E \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.1)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は速度場、 $\mathbf{B}$  は磁場、 $\Theta$  は密度の擾乱、 $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$  は電流密度、 $\mathbf{r}$  は位置ベクトル、そして、 $\mathbf{1}_z$  は地球の自転軸方向の単位ベクトルである。修正レイリー数  $R_{th}$ 、エクマン数  $E$ 、ロスビー数  $R_o$  は

$$R_{th} \equiv \frac{\alpha h_T r_c^2 g}{2\Omega \eta}, \quad E \equiv \frac{\nu}{2\Omega r_c^2}, \quad R_o \equiv \frac{\eta}{2\Omega r_c^2}. \quad (1.2)$$

で定義される。これらは各々、対流の駆動源である浮力、粘性力、流体の慣性とコリオリ力との比である。(1.2)において、 $\Omega$  は系の平均角速度、 $\eta$  は磁気拡散率、 $\nu$  は動粘性率、 $r_c$  は核の平均半径、 $g$  は CMB における重力加速度、 $h_T$  は平均温度勾配、 $\alpha$  は熱膨張率である。

スケーリングを

- 長さスケールとして、外核の平均半径  $r_c$
- 時間スケールとして、

<sup>2</sup>もっと細かく、「アフリカ東部からアメリカまでつづく長い水平流」とまで言っている論文もある (eg, Fearn, 1998)。

地球外核では、流体の慣性と粘性力はコリオリ力と比して無視できる程小さいことが、外核での  $\eta$  と  $\nu$  の推定値から見積もられている (eg., Stacey, 1992).

$$R_o \sim 10^{-8}, \quad E \sim 10^{-15} \quad (1.3)$$

それゆえ、地球ダイナモは強磁場ダイナモであると考えられている、すなわち leading order では

$$\mathbf{1}_z \times \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + R_{th} \Theta \mathbf{r} \quad (1.4)$$

が成立している。

(1.4) は磁気地衡風近似 (magnetostrophic approximation) と呼ばれている。

(1.3) より、コアでのパラメタの小ささより、内核接円筒の表面  $\Sigma$  での軸方向のローレンツ力は無視できる程小さい事が予想される。よって、残りの成分が流体の慣性と粘性力とで釣り合っている。

$$\begin{aligned} T_B &\equiv \int_{\Sigma} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_{\phi} d\Sigma \\ &= R_o \int_{\Sigma} \left( \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)_{\phi} d\Sigma - E \int_{\Sigma} (\nabla^2 \mathbf{v})_{\phi} d\Sigma \\ &\equiv T_I - T_{\nu} \end{aligned} \quad (1.5)$$

(1.5) は (1.1) の 経度成分 (つまり  $\phi$  成分) を  $\Sigma$  において積分することで得られる。(1.5) をここではトルクバランスとも呼ぶ。なぜならば  $\Sigma$  で囲まれる領域に存在する流体の自転軸周りの角運動量保存則を表しているからである。

あいにくと、(1.3) は小さすぎるため、直接数値シミュレーションを行うことはできない。それゆえ、この数値的な問題を解決するために様々な近似が用いられている。例えば Glatzmaier and Roberts (1995) では、数値的に取り扱える限界の粘性項を取り入れている。また、Kuang and Bloxham (1999) では、流体の慣性項が大きいとしながら、その一方で小さいながらも粘性項を残して取り扱っている。

Kuang and Bloxham (1997) では、それらの近似がダイナモのシミュレーション結果に与える影響が数値的に調べられた。それによると、慣性項を残したまま粘性の影響を変更すると、シミュレーション結果においてコア内部では劇的な変化が見られた。しかし、CMB での結果はとてもよく似ていた。

しかしながら、いまだにこれらの近似が、つまり、磁気対流において 2 次的な効果を与えられとされていた粘性と慣性とが、なぜシミュレーション結果に大きく影響を与えるのかについての十分な理解

は得られていない。これらの近似についての理解を深めるためには、コア内部の流れと生成される磁場を局所のおよび全体的にとらえて、(1.4) と (1.5) であらわされる力の釣合いを詳細に議論する必要がある。このような研究は、地球ダイナモのシミュレーションと地球中心核の力学に適した近似を選ぶ上で非常に重要である。

本論文では、以上の論点から、とりわけトルクバランス (1.5) と接円筒内部の流れの局所的な変動について議論する。本論文の構成は次に述べる通りである。第 2 節においては、数値モデルと本論文の計算に用いた二つの異なる近似をまとめる。第 3 節において、コア内部の力の釣合について詳細に議論する。第 4 節において、コア内部の流れと生成される磁場について考察する。第 5 節が結論である。

## 2 Numerical model

高速で回転している球殻内に存在する導電性流体について考える。球殻の平均回転角速度は

$$\Omega = \Omega \mathbf{1}_z \quad (2.1)$$

であるとする。系内部には、流体と同じ電気伝導度をもつ固体の内核が存在し、CMBには薄い電気伝導層が存在する。電気伝導層の磁気拡散率は

$$\eta_m = 400\eta \quad (2.2)$$

である。流れは、内核の境界 (inner-core boundary, 以下 ICB) からの流体へと流入してくる熱フラックスによる浮力によって発生する。固体の内核とマントルとは相対的に回転することができる。それらの角運動量変化は ICB および CMB におけるローレンツ力と粘性力によるトルクによって生ずる。

流れ場は (1.1) によって求められる。磁場  $B$  は (無次元化された) 誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.3)$$

によって記述される。そして、密度の擾乱 (つまりは温度の擾乱)  $\Theta$  は熱の式

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla T_0(r) - \mathbf{v} \nabla \Theta + q_k \nabla^2 \Theta \quad (2.4)$$

によって、記述される。ここで  $q_k = k/\eta$  ( $k$  は流体の熱拡散率) はロバート数であり  $T_0(r)$  は (無次元化された) 初期状態における流体核の温度場である。本論文では、 $q_k$  をブランドル数と呼ぶことにする。

基本場  $T_0(r)$  が残っているのは何故？

速度場  $\mathbf{v}$  と磁場  $B$  は各々ポロイダルスカラー  $S$  とトロイダルスカラー  $T$  を用いてポロイダル成分とトロイダル成分とに展開される。

$$\mathbf{v} = \nabla \times (T_v \mathbf{1}_r) + \nabla \times \nabla \times (P_v \mathbf{1}_r) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times (T_b \mathbf{1}_r) + \nabla \times \nabla \times (P_b \mathbf{1}_r) \quad (2.6)$$

ここで、 $\mathbf{1}_r$  は動径方向の単位ベクトルである。スカラー量である  $(P, T)$ ,  $\Theta$  は球面調和関数で展開される。(1.1), (2.3), (2.4) は擬スペクトル法によって  $(\theta, \phi)$  成分を、4 次の有限差分法で動径  $r$  成分を解いている。以上は Kuang and Bloxham(1999) に詳細に記述されている。

数値実験において用いられたパラメタは以下の通りである。

$$R_o = E = 2 \times 10^{-5}, \quad q_k = 1. \quad (2.7)$$

レイリー数は

$$R_{th} = 15,000. \quad (2.8)$$

とした。これは、熱対流のみでの場合と比較して超臨海レイリー数となっている。(2.7)は、このシミュレーションにおいて

$$\eta = \mu = \kappa$$

としたことを意味している。

ここでは、境界条件を変えて二つのシミュレーションを行った。一つは、滑べり無し (no-slip) 条件であり、これを (*Case I*) とする。もう一つは、粘性応力無し (stress-free) 条件である。これを (*Case II*) とする。一つ目の場合には、境界における粘性の影響と、接円筒表面での粘性の影響は  $\mathcal{O}(\sqrt{E})$  のオーダーであった。もう一つの場合には、境界における粘性の影響は存在しない。この場合の接円筒表面での粘性トルクは  $\mathcal{O}(E)$  のオーダーであった。流体の慣性と浮力はどちらの場合においても同様である。つまり、ロスビー数とレイリー数とは変更していない。

コアダイナモのシミュレーションにおける粘性の影響を確かめるために、どちらのケースとも計算の初期条件として、応力無し条件の場合によく発達した強磁場ダイナモの結果を用いている。どちらのシミュレーションにおいても、計算はほぼ磁場の自由拡散時間  $\tau_d$  (地球の場合には 15,000 yr) の間続けられた。*Case I* は、シミュレーション時間の最後に  $1.5\tau_d$  の間続けられた。そこでは系に別の結果が現れた。

Kuang and Bloxham (1997) において再現された二通りの磁場は、CMB での磁場の動径成分は類似しており、観測結果とも良い一致を示す、すなわち磁場は双極子成分が卓越し、西向きにドリフトする。以下の説明のため、図 1 に、CMB での磁場の動径成分のエネルギースペクトルを示す。

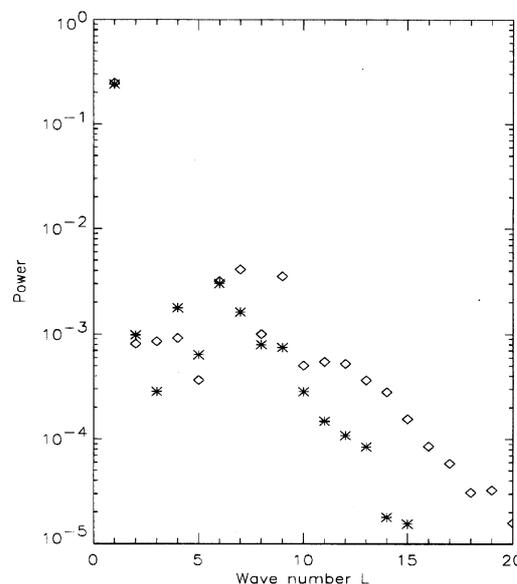


図 1: *Case I* (◇) と *Case II* (\*) での、CMB におけるポロイダル磁場のエネルギースペクトル

図 1 より、どちらのケースにおいても双極子成分 ( $L = 1$ ) が他の成分よりも 1 桁以上も大きいことがわかる。このパワースペクトルは、multi-poles が観測値よりも早く減衰する点を除いて、CMB での磁

場 (eg, Bloxham, 1995 の図 2) を逆にしたものと良く似ている.

”that of inverted geomagnetic field at the CMB” って?

磁場と速度場の軸対称成分を調べることで、二つのケースでのコア内部での振舞が異なることを確かめる. 速度場の軸対称成分を  $\bar{v}$ , 磁場の軸対称成分を  $\bar{B}$  として,

$$\bar{v} = \bar{V}_\phi(r, \theta) \mathbf{1}_\phi + \nabla \times \left( \frac{\Psi_v}{s} \mathbf{1}_\phi \right) \quad (2.9)$$

$$\bar{B} = \bar{B}_\phi(r, \theta) \mathbf{1}_\phi + \nabla \times \left( \frac{\Psi_B}{s} \mathbf{1}_\phi \right) \quad (2.10)$$

ここで,  $s$  は自転軸からの距離,  $\Psi_v$  と  $\Psi_B$  は流れ関数とフラックス関数である.

次節以降では特にコア内部と接円筒表面  $\Sigma$  における力のバランスに注目して, シミュレーション結果と両ケースの差異を詳細に解析する.

### 3 Force balances in the core

コア内部の流れと磁場の構造を理解するために、先ず (1.4) と (1.5) を調べる. leading order での磁気地衡風平衡 (1.4) から、得られた結果が 強磁場ダイナモ であるかと、コア内部のどの領域でダイナモ作用が発生しているかを知ることができる.

強磁場ダイナモ (strong-field dynamo) と弱磁場ダイナモ (weak-field dynamo) の違いを簡単に言うと

また、トルクバランス (1.5) により軸対称な帯状流 (それと差分回転) と、コア内部のねじれ振動 (Braginsky, 1976) の大きさを調べることができる.

ここで、leading order での力の釣り合い (1.4) を調べるために、ローレンツ力とコリオリ力の部分的な比  $\tilde{\Lambda}$  と浮力とコリオリ力の部分的な比  $\tilde{R}$  とを導入する.

$$\tilde{\Lambda} \equiv \frac{\int_0^{2\pi} |\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})| d\phi}{\int_0^{2\pi} |\partial_z \mathbf{v}| d\phi + \int_0^{2\pi} |\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})| d\phi} \quad (3.1)$$

$$\tilde{R} \equiv \frac{\int_0^{2\pi} |R_{th} \nabla \Theta \times \mathbf{r}| d\phi}{\int_0^{2\pi} |\partial_z \mathbf{v}| d\phi + \int_0^{2\pi} |R_{th} \nabla \Theta \times \mathbf{r}| d\phi} \quad (3.2)$$

これらの式における回転  $\nabla \times$  は...

これ以降  $\tilde{\Lambda}$  を有効エルザッサー数、 $\tilde{R}$  を有効レイリー数と呼ぶことにする.  $\tilde{\Lambda} = 0.5$  であるときに、ローレンツ力とコリオリ力が等しいことを示している. ローレンツ力がコリオリ力よりも小さい場合には、 $\tilde{\Lambda} < 0.5$  となる. 有効レイリー数についても同様である.

図2に、ケース1(上段)とケース2(下段)における (3.1) と (3.2) の分布を示す. 右半球は  $\tilde{\Lambda}$  の分布を、左半球は  $\tilde{R}$  の分布をしめしている. 図における色は、各々  $\tilde{\Lambda}$  と  $\tilde{R}$  の大きさを表している: コリオリ力の大きさがローレンツ力と浮力に比してオーダー一つ以上大きい場合は青色、コリオリ力の大きさがローレンツ力と浮力とほぼ同じ場合はオレンジを、ローレンツ力と浮力がコリオリ力に比してオーダー二つ以上小さい場合は空白となっている.

図2をみれば、両ケースにおける力の変動が全く違うことがわかる. ケース1では、ローレンツ力とコリオリ力が同程度の強さになっているのは接円筒の内核付近に限られている. それ以外の領域でのローレンツ力はとても小さい. それに対してケース2ではコア内部全領域でローレンツ力とコリオリ力が同程度の大きさとなっている. 両ケースとも浮力はコア内部全領域でコリオリ力と同程度の大きさである. それゆえ磁気地衡風平衡 (1.4) は、ローレンツ力とコリオリ力が同程度の領域で成立していることとなる.  $\tilde{\Lambda}$  と  $\tilde{R}$  は時間とともに変動する. しかし、それらの分布は図2と同様である.

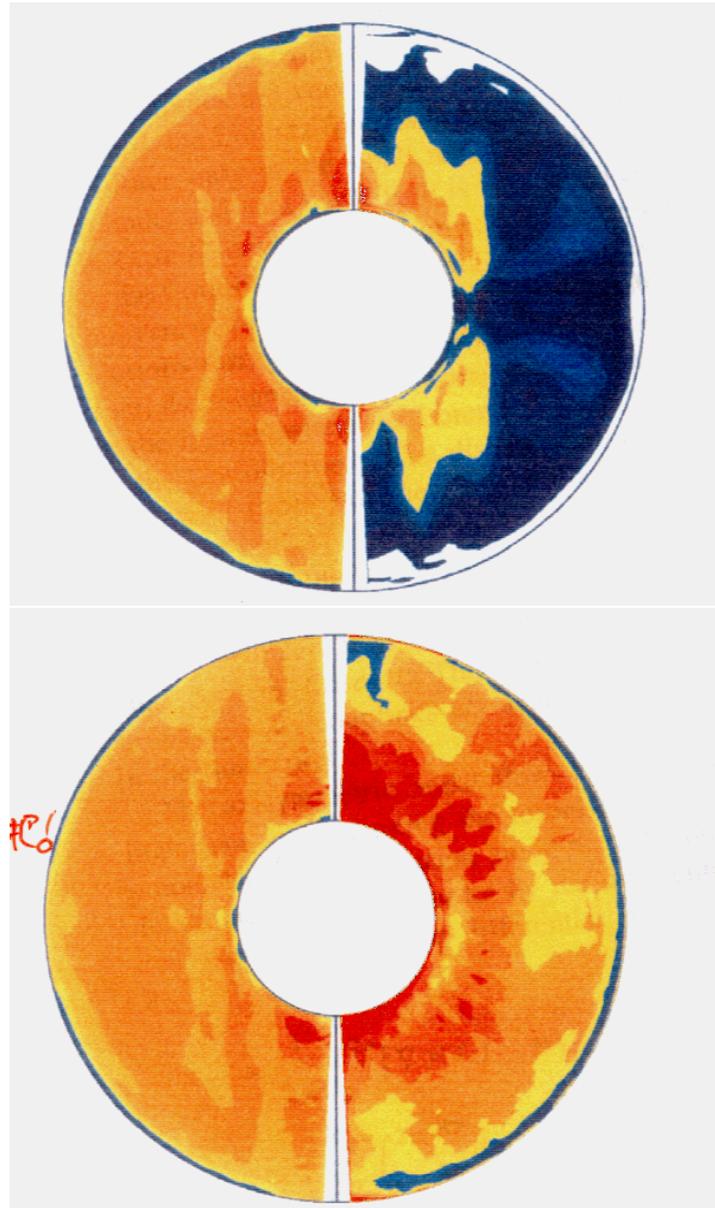


図 2: コア内部での力の釣合の様子. 上段がケース 1, 下段がケース 2 である. 右半球が有効エルザッサー数  $\tilde{\Lambda}$  の分布, 左半球が有効レイリー数  $\tilde{R}$  の分布を示している. 図の色はコリオリカと比べた各々の力の大きさを示している. オレンジは各々の力がコリオリカと同程度であることを, 青は各々の力がコリオリカよりもオーダー一つ小さいことを, 空白の部分は各々の力がコリオリカよりもオーダー二つ以上小さいことを示している.

強磁場ダイナモのダイナモ作用は磁気地衡風平衡が成立する領域で発生することから, 図 2 より, ケース 1 における強磁場ダイナモの領域は, とても小さく局所的である: 接円筒内部の内核付近である. ケース 2 におけるダイナモ作用の発生している領域は液体核全体である. このことから, 強い粘性の影響は液体核内部のダイナモ作用を弱めることがわかる.

コア内部の軸対称な帯状流  $\tilde{V}_\phi$  の大きさはポロイダル磁場からトロイダル磁場を生成するため重要である。この自転軸方向の変動は、leading order では温度風の微分  $W_T$  と磁気風の微分  $W_B$ <sup>3</sup> とから求めることができる。

$$-\frac{\partial \tilde{V}_\phi}{\partial z} \simeq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})]_\phi d\phi - \frac{R_{th}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} d\phi \equiv W_B + W_T \quad (3.3)$$

これ以後、 $W_T$  と  $W_B$  を単に温度風、磁気風と呼ぶことにする。図3は、磁気風と温度風のスナップショットである。上段がケース1、下段がケース2である。右半球には温度風  $W_T$  を、左半球には温度風と磁気風の和  $W_T + W_B$  を示している。オレンジは正、青は負である。

図3より、両ケースとも接円筒外部における温度風は定性的には同じである：北半球が負、南半球が正である。和  $W_T + W_B$  の様相も殆んど  $W_T$  と一致する。それゆえ接円筒外部での磁気風  $W_B$  は  $W_T$  と比べて小さい。

接円筒内部におけるこれらの風の様相は両ケースにおいて全く異なる。ケース1では、 $W_T$  は北極側で常に正、南極側で常に負となっている。つまり、赤道へ近付くほど温度が下がっている事を示している。結果として、 $\tilde{V}_\phi$  は深さとともに増加する。つまり、CMB 付近では西向き、ICB 付近では東向きにドリフトする。ケース2では、接円筒内部において温度風  $W_T$  の符号が変わっている。例えば、北極側ではCMB 付近において負となっている。また、ICB 付近では正となっている。この状況は  $W_B$  についてはさらに複雑である。 $W_B$  は  $W_T$  と同程度であり、 $W_T$  と逆向きに作用することができる。結果として、帯状流  $\tilde{V}_\phi$  は自転軸方向に単調には変化しないことがわかる。南極側には、この特性が見られなかった。このことは、ケース1とは異なり、南北の対称性は存在しないことを意味している。

接円筒表面  $\Sigma$  におけるトルクバランス(1.5)から、鉛直方向には変化しない軸対称な帯状流(差分回転、もしくは地衡風)の変動を求めることができる。コア内部におけるこのバランスを求めるために、ケース1におけるローレンツトルク(実線)、粘性トルク(点線)、そして慣性(破線)を図4に示す。接円筒外部が(a)接円筒内部が(b)である。ケース2における同様の図を図5に示す。

図4より、接円筒外部でのローレンツトルクは弱く、結果として慣性項と粘性トルクとがバランスしていることが分かる。接円筒内部では、ローレンツトルク、粘性トルク、そして慣性項がすべて同程度であることもわかる。接円筒外部でローレンツトルクが弱いことは、この領域における磁気地衡風平衡(図2)と整合的である。トルクバランスは時間とともに定量的に変動しない。

接円筒外部におけるこの結果は、ねじれ振動(Braginsky, 1976)がこの領域には存在しないことを示唆している。ローレンツトルクによってねじれ振動が発生したとしても、それは小さく、粘性トルクによってすぐに散逸してしまう。接円筒内部では、長周期のねじれ振動が存在しそうではある。しかしそれは弱く、粘性トルクによってすぐに減衰してしまうだろう。

ケース2におけるトルクバランス(1.5)は、ケース1とは全く異なる。図5にそれを示す。コア全域において、粘性トルクはローレンツトルクに比して小さく、その結果  $\Sigma$  ではローレンツトルクと慣性とが

<sup>3</sup> $W_T$  と  $W_B$  が温度風と磁気風の鉛直微分であることは、(3.3)から明らかである。

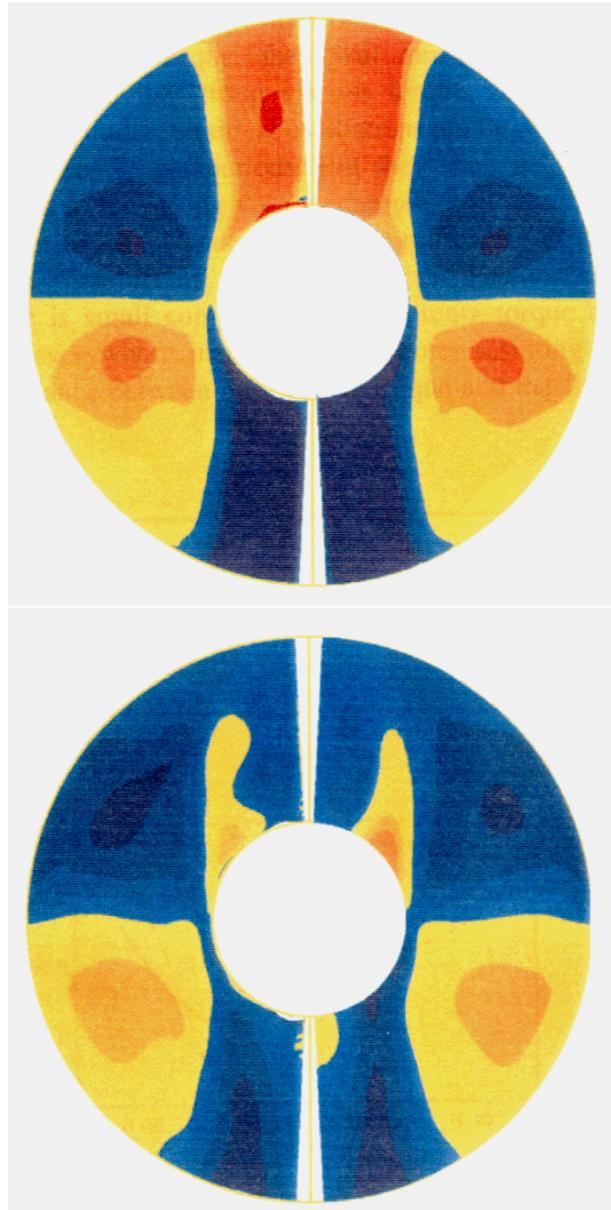


図 3: 温度風  $W_T$  (右半球) と, 温度風と磁気風の和  $W_T + W_B$  の図. ケース 1 が上段, ケース 2 が下段である. オレンジが正の, 青が負の量を示している.

バランスしている. これは, つよいねじれ振動がコアにおいて生成されていることを示唆している. これはわずかに粘性によって減衰するであろう.

ICB へ作用する軸周りのトルクは, 接円筒内部での (1.5) と密接に関係している. 図 6 に, トルクの時間変動を示す. (a) がケース 1, (b) がケース 2 である.

図 6 より次の事がわかる. ケース 1 では, ローレンツトルク (実線) は正であり, 負の粘性トルク (点線) を補完していて, 振動をとめ内核の慣性 (破線) とバランスしていることがわかる. ケース 2 では, ICB

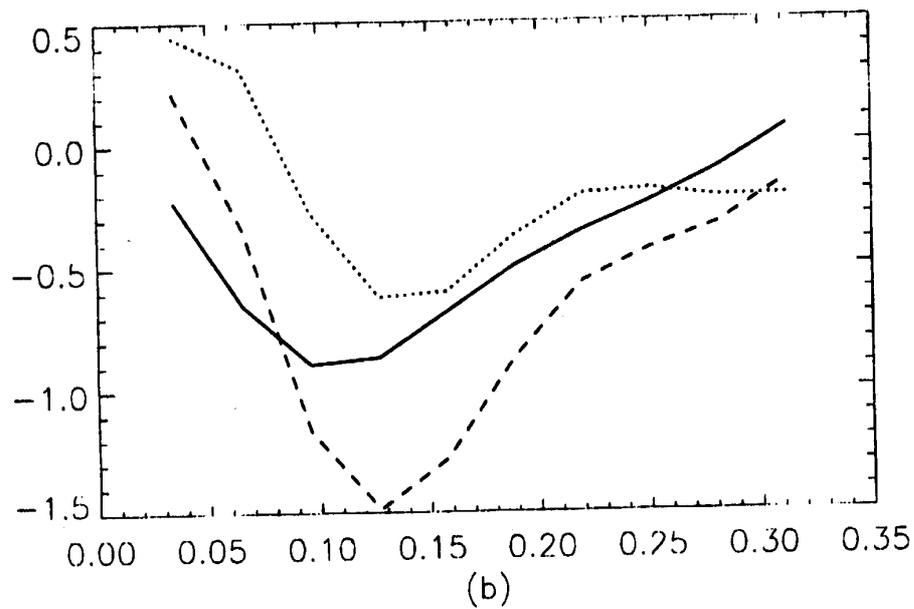
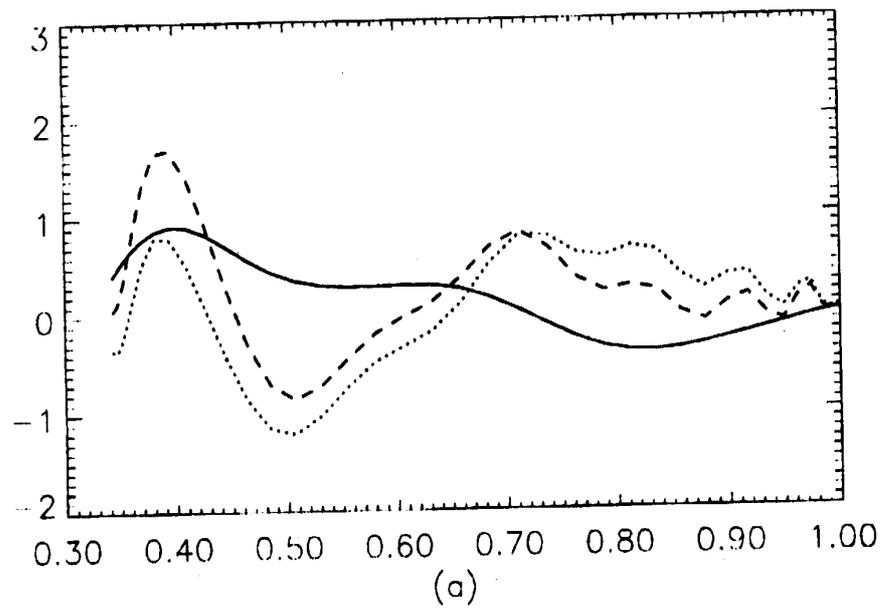


図 4: ケース 1 における接円筒表面における軸周りのトルク. 接円筒外部を (b) に, 接円筒内部を (a) に示す. 実線はローレンツトルク, 点線は粘性トルク, 破線は流体の慣性項 (移流項) をしめす. 横軸は自転軸からの距離, 縦軸はトルクの大きさである.

における粘性トルクは除かれている. ローレンツトルク (図 6(b) の実線) は平均をゼロとしたところから振動していて, 内核の慣性とバランスしている. 結果としての内核の回転については, 4 節で議論する.

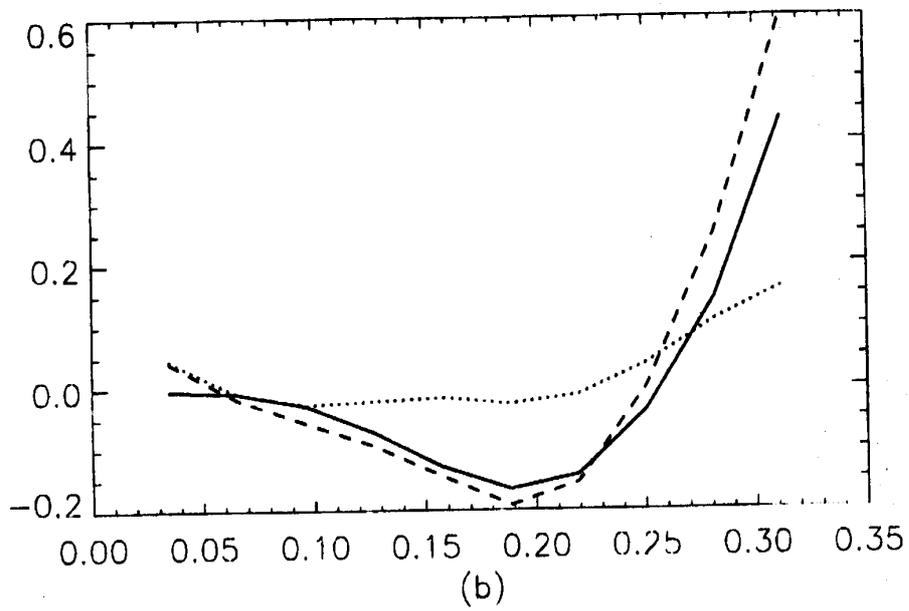
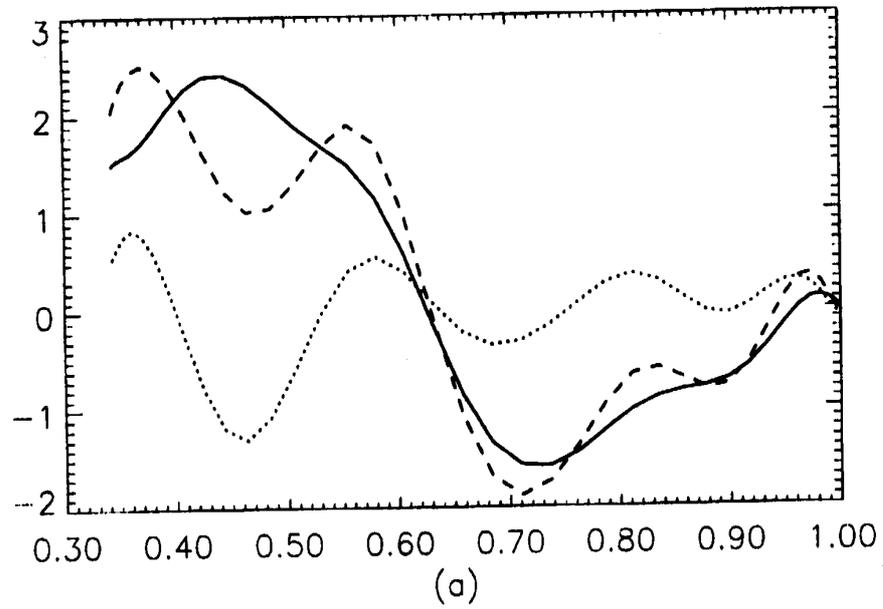
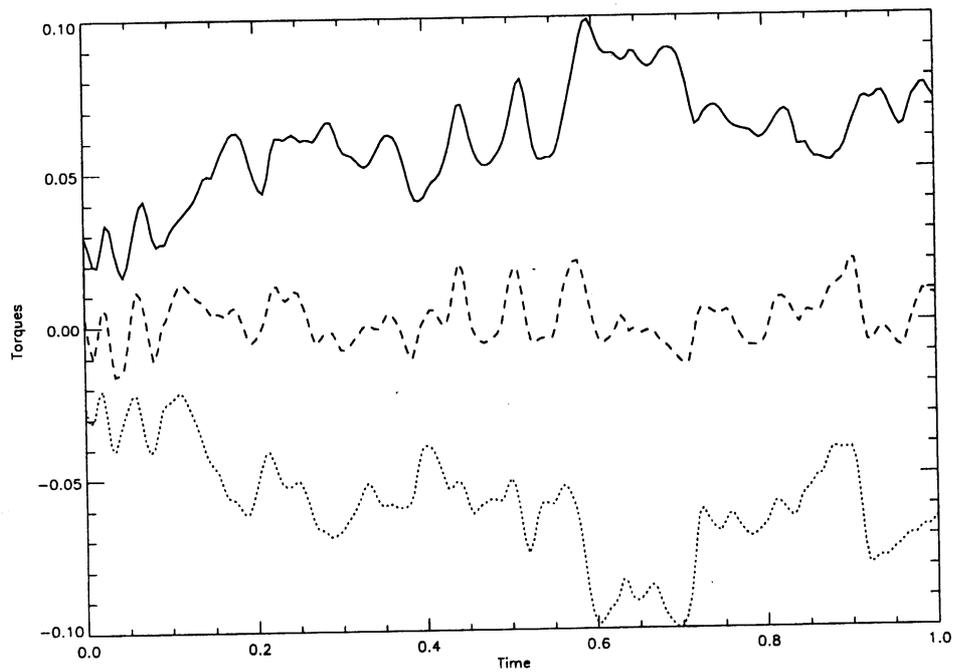
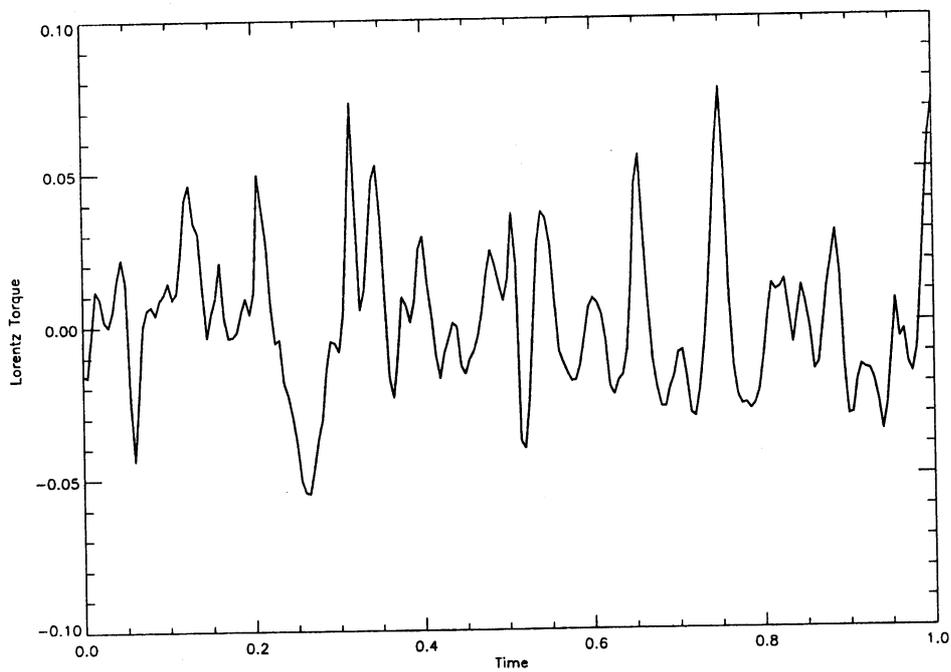


図 5: ケース 2 における軸周りのトルク. 表し方は図 4 と同様.



(a)



(b)

図 6: 内核における自転軸周りのトルクの時間変動. (a) はケース 1, (b) はケース 2 を示している. 実線はローレンツトルク  $\Gamma_B$ , (a) での点線は粘性トルク  $\Gamma_v$ , そして (a) での破線は内核の慣性を表す. 縦軸はトルクの大さを, 横軸は時間である. 時間は磁気拡散時間でスケールしてある.

## 4 The flow and the magnetic field in the core

この節では、外核での流れ場  $v$  と磁場  $B$  の構造を詳細に議論する。まず  $v$  と  $B$  の平均値を求めるために、外核の運動エネルギー  $E_K$  と磁場エネルギー  $E_B$  とを求める。

$$E_K \equiv \frac{1}{2} \int_{V_{core}} dV \left\{ [\nabla \times (T_v \mathbf{1}_r)]^2 + [\nabla \times \nabla \times (P_v \mathbf{1}_r)]^2 \right\} \equiv E_K^T + E_K^P. \quad (4.1)$$

$E_K^T$  をトロイダル運動エネルギー、 $E_K^P$  をポロイダル運動エネルギーと呼ぶことにする。同様の展開を磁気エネルギー  $E_B$  についても行うことで (4.1) の  $T_v, P_v$  同様に  $T_B, P_B$  を得ることができる<sup>4</sup>。

図 7 に運動エネルギーの時間変動を示す。実線は全運動エネルギー  $E_K$ 、点線は  $E_K^T$ 、破線は  $E_K^P$  であり、(a) はケース 1、(b) は ケース 2 である。

時間がたってもエネルギーの変動は似た様相を示す。両ケースとも、トロイダル運動エネルギー  $E_K^T$  がポロイダル運動エネルギー  $E_K^P$  より一桁以上大きく、流れのトロイダル成分がポロイダル成分よりかなり大きいことが示唆される。また、 $E_K^P$  の大きさは同じ程度であるのに対してケース 2 での  $E_K^T$  は 3 倍以上の大きさを示している。これは、ケース 2 において流れのトロイダル成分が非常に強いことを意味している。

エネルギーを軸対称成分と非軸対称成分とに分離して解析したのが図 8 である。実線が、トロイダル運動エネルギーの軸対称成分と非軸対称成分との非、点線が、ポロイダル運動エネルギーの軸対称成分と非軸対称成分との非であり、(a) がケース 1、(b) がケース 2 である。

図 8 より、ポロイダル運動エネルギーの非対称成分は全体の 90% 以上をしめており、両ケースとも流れのポロイダル成分は非対称成分が強いことがわかる。

しかし、トロイダル成分は全く異なっている。ケース 1 では、 $E_K^T$  は軸対称成分と非軸対称成分とがほぼ同じ程度である。ケース 2 では、トロイダル成分が卓越している： $E_K^T$  全体のほぼ 90% が軸対称成分である。

同様の図を磁気エネルギーについて描いたのが図 9、図 10 である。

これらの図より、両ケースとも

$$E_B^T \simeq 4E_B^P$$

であることがわかる。つまり、トロイダル磁場の平均値はポロイダル磁場平均値の約 2 倍の大きさである。また、ケース 1 における  $E_B^T$  と  $E_B^P$  はケース 2 に比して小さく、ケース 2 の方が磁場の平均値が大きいこともわかる。

<sup>4</sup>ここではエネルギー収支については考えていない。エネルギー収支を考えるためには、回転している内核とマンツルの運動エネルギーと、内核と CMB 表面の伝導層の磁気エネルギー、そして絶縁体である外部領域のポテンシャル磁場のエネルギーを含めて考える必要がある。さらに、 $R_o$  を (4.1) に導入する必要がある (e.g., Hollerbach, 1996)。

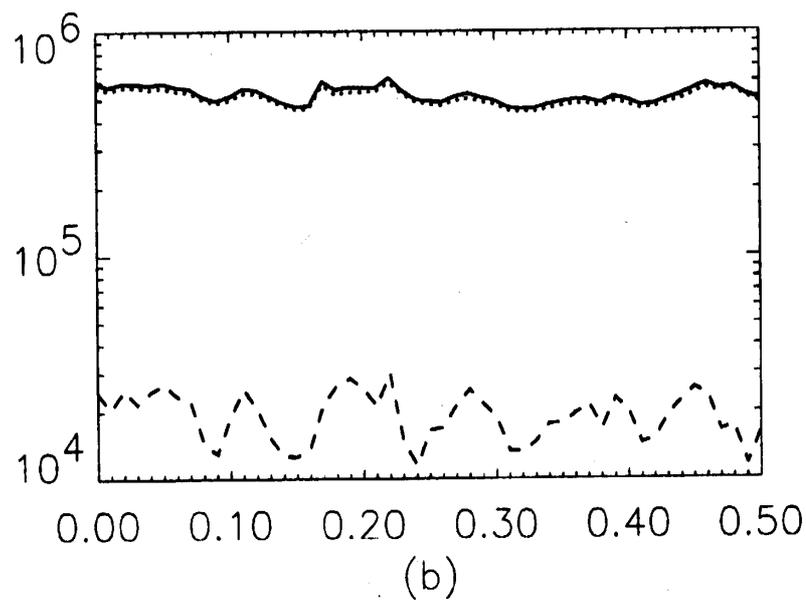
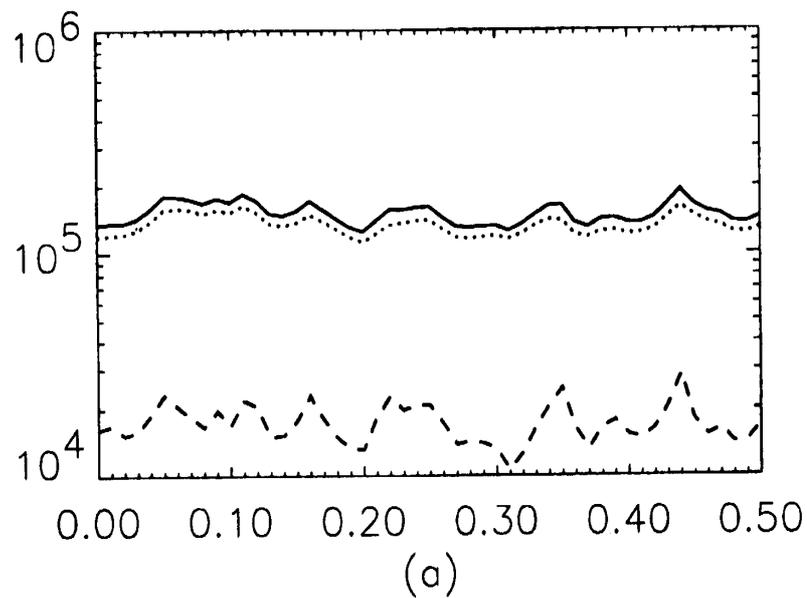


図 7: 無次元化した運動エネルギーの時間変動. (a) はケース 1 を, (b) はケース 2 である. 実線は全運動エネルギー, 点線は運動エネルギーのトロイダル成分, 破線は運動エネルギーのポロイダル成分である. 横軸の時間は磁気拡散時間でスケールしている.

エネルギーを軸対称成分と非軸対称成分とにわけたのが図 10 である. 両ケースとも, トロイダル磁場エネルギー  $E_B^T$  (実線), ポロイダル磁場エネルギー  $E_B^P$  (破線) の様相は似ている: どちらも軸対称成分が全エネルギーの約 2 倍から 3 倍の大きさを持っており, このダイナモでは, 平均軸対称成分がわずかに非軸対称成分よりも大きいことがわかる. それゆえ, このダイナモは *nealy-axisymmetric dynamo* ではない.

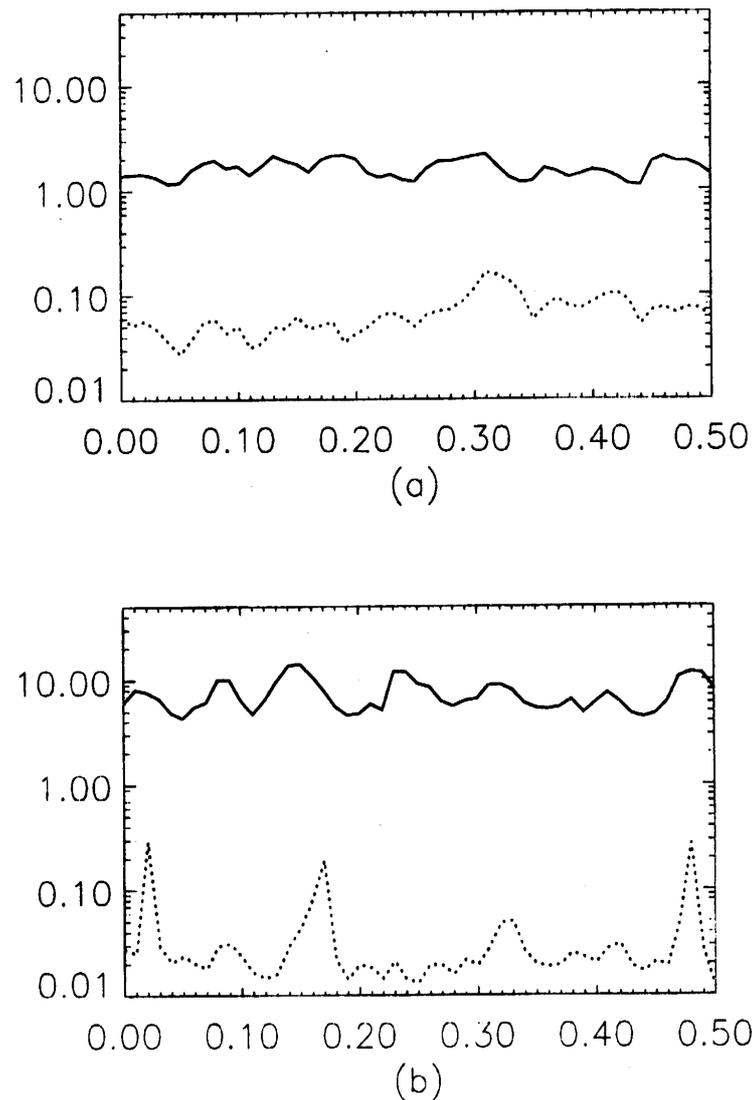


図 8: トロイダル運動エネルギーの軸対称成分と非軸対称成分との比 (実線) とポロイダル運動エネルギーの軸対称成分と非軸対称成分との比 (点線). (a) がケース 1, (b) がケース 2 である.

流れの局所的な構造を調べるために, 図 11 に, ICB 付近 (a), 中程の深さ (b), CMB 付近 (c) での流れ場の様相を示す. 左側がケース 1 であり, 右側がケース 2 である. 鉛直流  $v_r$  について色分けがしてある: 上昇流 ( $v_r > 0$ ) がオレンジ, 下降流 ( $v_r < 0$ ) が青である. 矢印は水平流

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v} - v_r \mathbf{1}_r$$

であり, 矢印の長さがその大きさである.

図 11 からは, 両ケースにおける類似性と相違性が見てとれる. 始めに赤道域の流れに注目すると, ICB より遠い部分では両ケースの流れ場には類似性が見られる. 例えば CMB 付近において西向きドリフトが見られる (図 11(c)). そして柱状の対流セルが鉛直流  $v_r$  の分布から見付けられる.

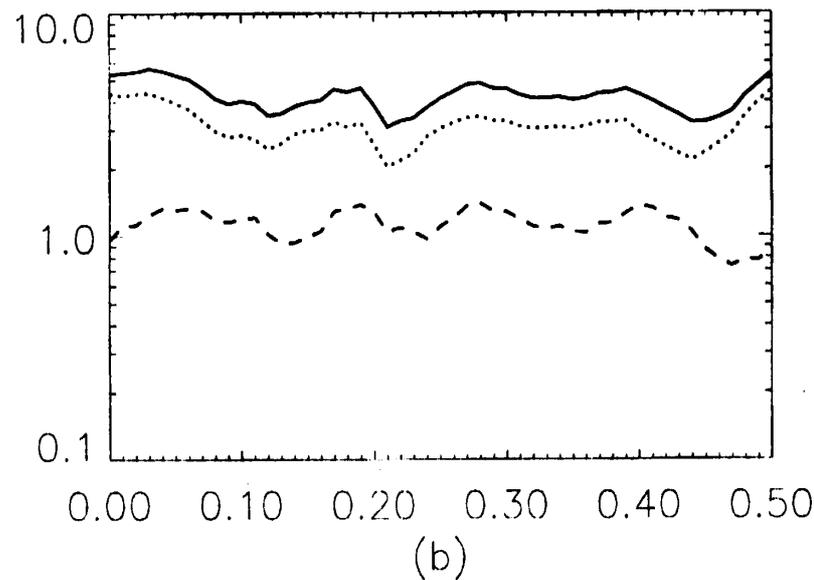
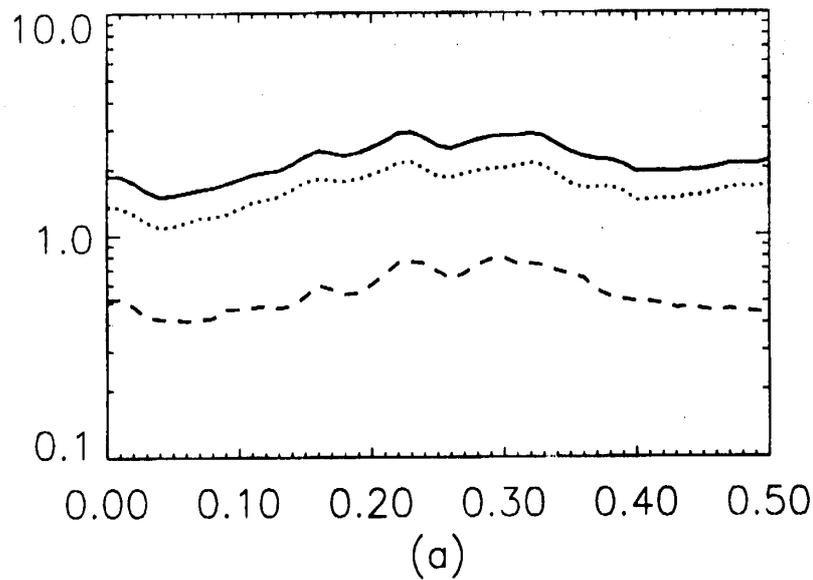
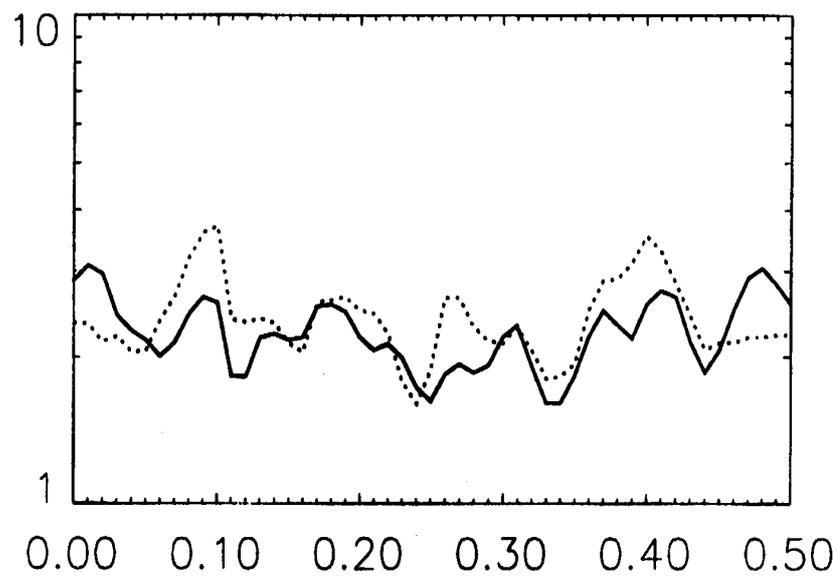
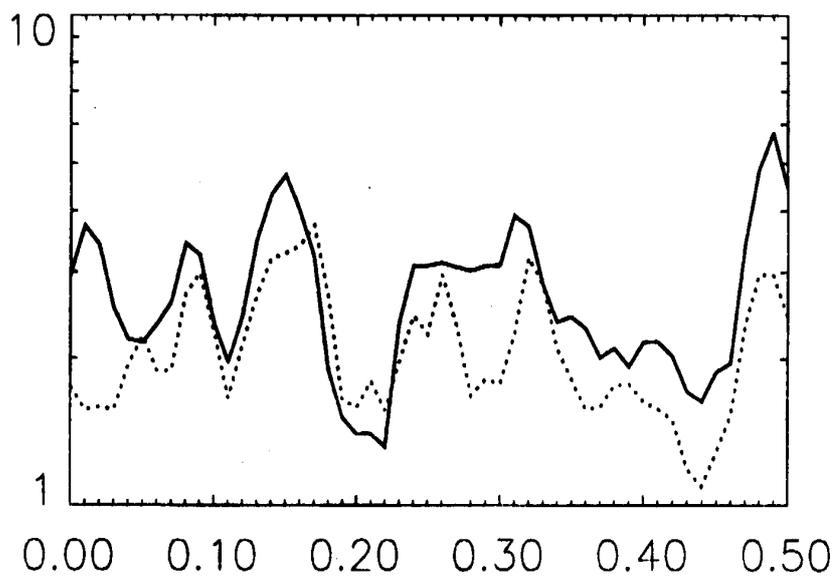


図 9: 無次元化した運動エネルギーの時間変動. (a) はケース 1 を, (b) はケース 2 である. 実線は全運動エネルギー, 点線は運動エネルギーのトロイダル成分, 破線は運動エネルギーのポロイダル成分である. 横軸の時間は磁気拡散時間でスケールしている.

しかし, ICB 付近と接円筒内部における両ケースにおける流れ場  $v$  の様相は全く異なっている. ICB での様相を示している 図 11(a) より, ケース 1 における水平流  $v_H$  はすべて東向きである. その一方でケース 2 における水平流  $v_H$  はもっと複雑である: ICB 付近では東向きの流れだけでなく, 西向き, 極向きの流れも存在している. 図 11 における矢印の長さを比較することで, 水平流  $v_H$  はケース 1 よりもケース 2 の方が大きいことがわかる.



(a)



(b)

図 10: トロイダル運動エネルギーの軸対称成分と非軸対称成分との比 (実線) とポロイダル運動エネルギーの軸対称成分と非軸対称成分との比 (点線). (a) がケース 1, (b) がケース 2 である.

次に接円筒内部に注目する. ケース 1 では極に上昇流, その周囲に下降流が存在するのがわかる. しかしケース 2 では逆になっている. ケース 1 における水平流  $v_H$  は ICB 付近では東向きであるのに対して, CMB 付近では西向きになっている. ケース 2 では, ICB 付近では弱い西向きの流れ, CMB 付近で

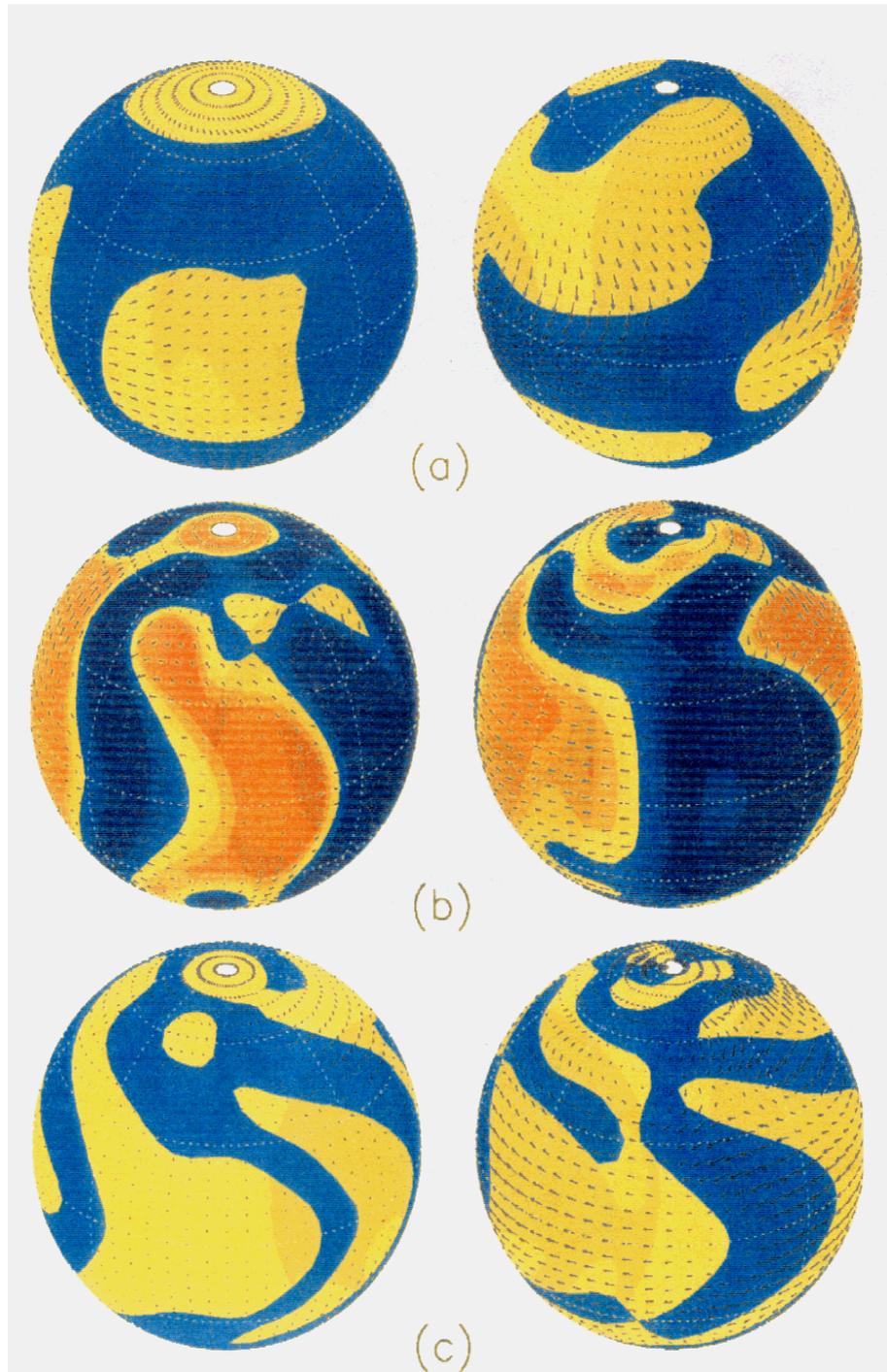


図 11: 流れ場の様相. 左側がケース 1, 右側がケース 2 でありそれぞれ ICB 付近 (a), 中程の深さ (b), CMB 付近 (c) となっている. 鉛直流  $v_r$  について色分けがしてある: 上昇流 ( $v_r > 0$ ) がオレンジ, 下降流 ( $v_r < 0$ ) が青である. 矢印は水平流  $v_H = v - v_r \mathbf{1}_r$  であり, 矢印の長さがその大きさである.

は弱い東向きの流れになっている. 接円筒内部の水平流  $v_H$  はこの領域での温度風  $W_T$  と磁気風  $W_B$  (図 3) と整合性がとれている.

同様の絵を磁場  $B$  について描いたのが図 12 である.

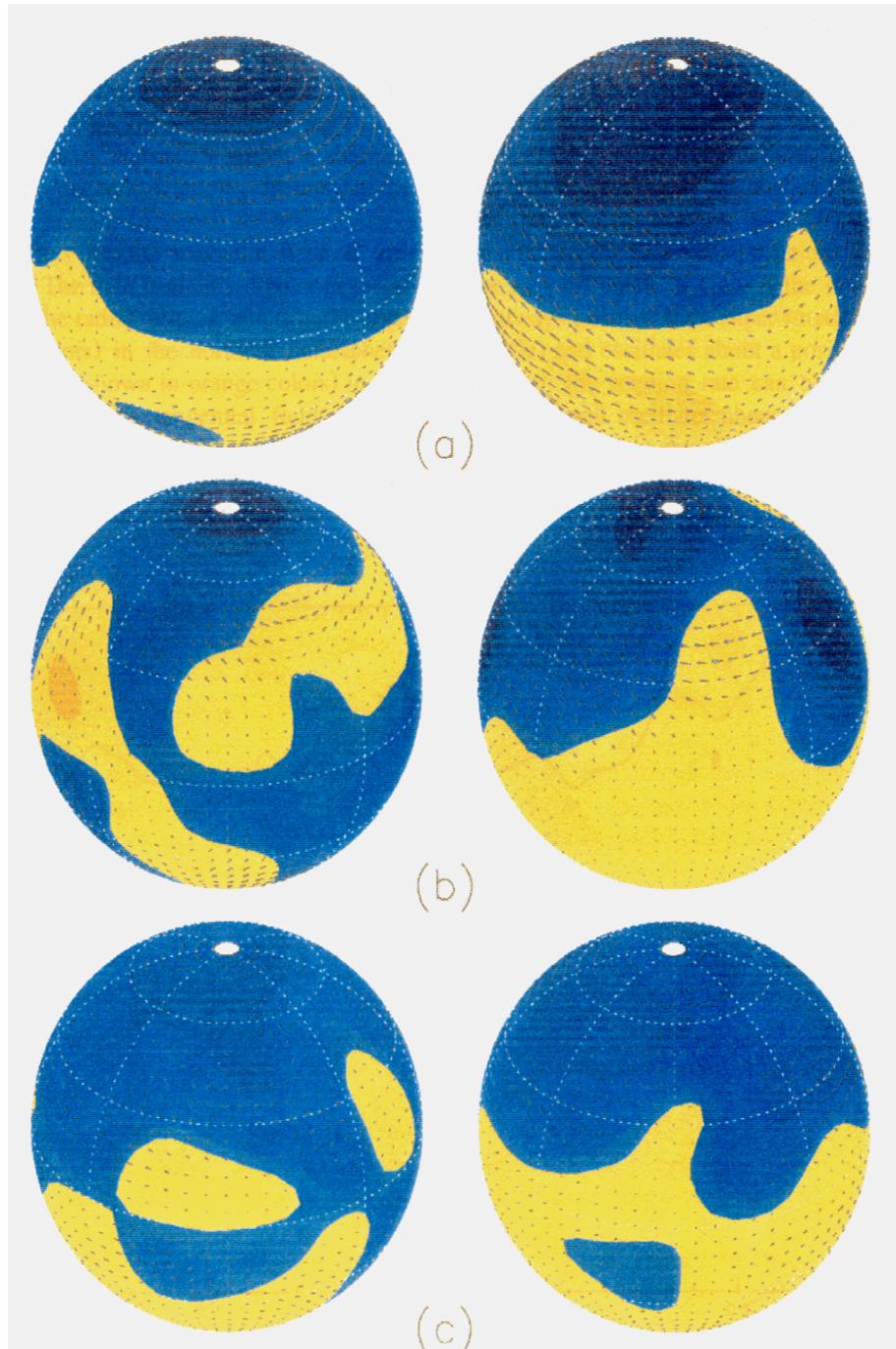


図 12: 図 11 と同様の図を磁場について描いた図.

図 12(c) より CMB における磁場が双極子であることははっきりと分かる: 磁場の動径成分  $B_r$  は北半球では吸い込み (青色) であり, 南半球では湧き出し (黄色) となっている. 磁場の水平成分  $B_H$  が CMB 付近で弱くなっているのは, マントルの電気伝導度が小さいためである. 図 12(b) より, 流体殻中程での磁場の様相は二つのケースでは異なるのが分かる. ケース 2 における磁場の動径成分  $B_r$  はここでも双極子に似ている. しかしケース 1 では四重極子のように見える. 図 12 のケース 1 より, 接円筒内

部の磁場が強いことがわかる。しかし、ケース 2 での磁場は中緯度で強く、赤道域で弱くなっている。

図 13 に内核の差分回転の時間変動を示す。

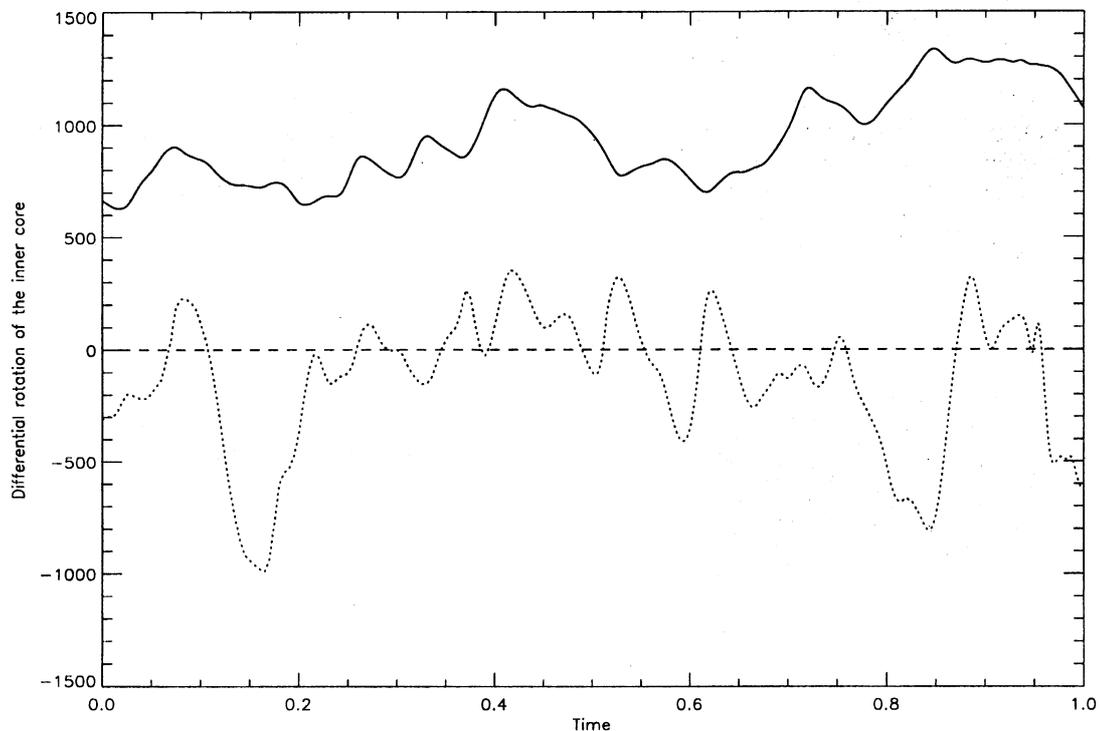


図 13: (a) がケース 1, (b) がケース 2 である。

ケース 1 が実線, ケース 2 が点線である。全トルクは平均値をゼロとして振動している。(図 6 (a) の破線および (b) の実線) しかし、内核の差分回転の様相は両ケースにおいてかなり異なっている: ケース 1 では、内核の回転は常に正である (つまり、マントルに対して速く回転 – super rotation している)。そして平均値を正として振動している。それに対してケース 2 では、回転速度は正にも負にもなっており、平均値としてはゼロに近くその周りを振動している。内核の差分回転は ICB 付近の水平流  $v_H$  (図 11(a)) と整合性がとれている。

## 5 Conclusion

本論文では、我々が求めた強磁場ダイナモの数値解における力のバランス、流れ場の構造、そして磁場について詳細に述べた。特に、他のパラメタは変更せずに境界条件の異なる二つの数値解についてを議論した。ケース 1 では、境界条件を非すべり (no-slip) 条件にしたため、結果として境界における粘性の影響が現れた。ケース 2 では、境界条件を応力なし (stress-free) 条件にしたため、結果として境界における粘性の影響が無く、結果として核内における粘性散逸も最小となっている。

数値計算結果は、CMB では両ケースとも定性的には類似性があるものの、極域と ICB 付近では全く様相が異なっている (図 11, 図 12 参照)。境界での粘性の影響が強い場合には、ダイナモ作用が強い領域は ICB 付近と接円筒内部に限定されている (図 2)。接円筒外部の流れはほぼ熱対流である。その一方で、境界における粘性の影響を無視した場合には流体核全体で強いダイナモ作用が発生していた。生成された磁場は両ケースとも強い。これらの結果から、境界における粘性はダイナモ作用を弱めることが示された。

この反ダイナモ作用はコアにおける流れが粘性によって減衰することによって説明することができる。これは特にコアの捻れ振動 (1.5) から明らかである。これは接円筒内部で特に重要な意味をもつ。今回のものである (2.2) に示した通りマンツルの電気伝導度はとても小さい。よって、CMB においてトロイダル磁場はとても小さくなっている。ケース 1 での強い粘性とのカップリングはすぐに磁場とのカップリングより卓越する (これは地球外核にはあてはまりそうもない)。そして接円筒表面  $\Sigma$  におけるトルクバランス (1.5) においてもこのことが反映されている (図 4(a) 参照)。それゆえ、ローレンツトルク  $T_B$  によってひき起こされる捻れ振動は、粘性トルク  $T_\nu$  によってすぐに止められてしまう。結果として、図 2 に見られるように、接円筒外部の差分回転は弱められ、ダイナモ作用はこの領域では発生しないことになる。

内核は良導体 (このモデルでは液体核と同じ伝導度) であるから、ICB における磁場とそのカップリングはとても大きい。それゆえ、磁場とのカップリングを押えるために、強い粘性とのカップリングが必要となる。事実、エクマン数 (2.7) より、接円筒内部と ICB 付近では粘性トルクとローレンツトルクが同程度の強さとなっている (図 4(b), 図 6(a) 参照)。接円筒内部での捻れ振動は粘性トルク  $T_\nu$  によって減衰されているが、同じ程度の強さのローレンツトルク  $T_\nu$  によってすぐに生成されうる。それゆえ、ダイナモ作用は粘性散逸の影響をあまりうけず、図 2 にしめしたように、接円筒内部では磁場が維持されやすいことになる。

差分回転への粘性散逸が強いことがコア内部での平均流の変動から示された: つまりケース 1 での弱いトロイダル流れ (図 7) は主に弱い軸対称なトロイダル流れによる (図 8)。

境界における粘性の影響は、帯状流の鉛直変化にも影響を与えることが温度風  $W_T$  と磁気風  $W_B$  (3.3) からわかった。接円筒内部のダイナモ作用と比較して、接円筒内部での流れと内核の差分回転は粘性の影響を強く受けていた。

粘性境界条件が存在する場合には、 $W_T$  が流体全域で  $W_B$  より卓越する。接円筒内部では、その結果として回転軸に近くなる程帯状流が強くなっている (図 3 の上段参照)。これは内核の超回転 (Aurnou

*etal.*,1996) によって説明することができる (図 13).

粘性の影響が無視できる場合には, 温度風  $W_T$  と磁気風  $W_B$  が同程度の大きさを持っており, 接円筒内部でのその振舞いがまったく異なっている (図 3 下段参照). どちらの流れもこの領域では符号を変えている. 両者は時間とともに互いに強めあったり弱めあったりしている. その結果として帯状流の鉛直変動は単調ではない.

内核接円筒における帯状流 (3.3) とトルクバランス (1.5) との違いは ICB からのトルクの違い (図 6) と内核の差分回転 (図 13) が原因である. 粘性の影響がある場合には内核の超回転が見られ, それが維持されていた. また, マントルから見た内核の振動は無視できるほ.

このモデルに超粘性を導入した場合 (Kuang and Bloxham,1999) には, 得られた結果の力のバランスに変化は見られなかった. このことから, leading order での磁気地衡風近似 (1.4) は, 超粘性の影響 (超粘性を導入することで, 流体全体において粘性力はコリオリ力に比して一桁小さくなる) を受けないことが定量的に明らかになった. 図 4 と図 5 における粘性トルクは超粘性を導入して計算されている. ダイナモのシミュレーションにおける超粘性の議論については Zhang and Jones(1997) を参照されたい.

しかしながら, 本研究では  $R_o$  を変更していないため, 流体の慣性項が流れの構造にどう影響を与えるかについての答えは得られていない. 本論でのモデルでは, 慣性項はずいぶん小さいのだが, まだまだ現実の地球のものよりは桁ちがいに大きい.  $R_o$  を小さくすることは, 結果のうち特に捻れ振動と内核の回転に影響をあたえる. leading order での力のバランスは定量的には影響がない: 本論のモデルにおける慣性項はコリオリ力に比して桁違いに小さいからである. それゆえ, (1.4) の分布は定量的にも成立しそうではある. 捻れ振動の大きさと周期と内核の回転は, トルクバランス (1.5) において慣性項が存在することから  $R_o$  の大きさによって変化する. このことについて更に研究をつづけたい.

## 参考文献

- Christensen, U., Olson, P. and Glatzmaier, G.A., 1998: A dynamo model interpretation of geomagnetic field structure. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1565–1568.
- Fearn, D.R., 1998: Hydromagnetic flow in planetary cores. *Rep. Prog. Phys.*, **61**, 175–235.
- Glatzmaier, G.A. and Roberts, P.H., 1995: A three dimensional convection dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 63–75.
- Glatzmaier, G.A. and Roberts, P.H., 1996: An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection. *Physica D*, **97**, 81–94.
- Hollerbach, R., 1996: On the theory of the geodynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **98**, 163–185.
- Jones, C.A., Longbottom, A.W. and Hollerbach, R., 1995: A self-consistent convection driven geodynamo model using a mean field approximation. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **92**, 119–141.
- Kuang, W. and Bloxham, J., 1997: An earth-like numerical dynamo model. *Nature*, **389**, 371–374.