# 積雲対流における
# 支配方程式

## 非弾性方程式とブシネスク近似

高橋 こう子
koko@ep.sci.hokudai.ac.jp

# 何が知りたいのか

図１： 夏の積雲

「今日は夕立ちが降るのだろうか」とか
「集中豪雨をもたらしたものは
なんだろう」とか

# 何が知りたいのか

積雲・積乱雲は

- ◇どのように発達するか
  - ◇雨が降る?降らない?
  - ◇降るならどれくらい降る?
  - ◇降雨以外にどのような現象が起きているか

**積雲対流を理解する**

# 目的

本ゼミでは

積雲対流で用いられる支配方程式:

◇非弾性方程式

◇ブシネスク方程式

と近似：

◇非弾性近似

◇ブシネスク近似

を紹介する．ただし詳しい導出は行わない．

# 基礎方程式系

粘性，熱拡散，回転がなく，断熱な系における

運動方程式，連続の式，熱力学の式

は

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -c_p\theta\nabla\Pi - \nabla\Phi \tag{1}$$

$$\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)\frac{d}{dt}\ln\Pi = -\nabla\cdot\mathbf{u} \tag{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{3}$$

ただし変数を基本状態とそこからのずれとに分け，ポテンシャル力が一様とした．
また

$$\Pi = \left(\frac{p}{P}\right)^{\kappa}, \kappa = \frac{R}{c_p} \tag{4}$$

$\mathbf{u}$ : 速度， $\rho$ : 密度， $p$ : 圧力， $P$ : 基準圧力，

$\Phi$ : ジオポテンシャル， $\theta$: 温位

# 仮定 I

◇ 鉛直スケール

～ 等温位大気の高さ

◇ 大気はほぼ等温位

$$\alpha_1 \equiv \frac{\theta'}{\Theta} \ll 1 \tag{5}$$

$\Theta$ : $z=0$ での温位 $\theta'$ : 基本状態の温位からのずれ

◇ 水平・鉛直速度は音速と比べて非常に小さい

$$\frac{U^2}{C_s^2} \ll 1, \quad \frac{W^2}{C_s^2} \ll 1 \tag{6}$$

# 非弾性方程式系

各変数を $\alpha_1 = \frac{\theta'}{\Theta}$ で展開し基礎方程式系に代入

$O(\alpha_1^0)$，$O(\alpha_1^1)$ の項を集めると

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -c_p \Theta \nabla \Pi' + g\frac{\theta'}{\Theta}\mathbf{k} \tag{7}$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{N_s^2 \Theta}{g} w \tag{9}$$

ただし $\rho_0$ は基本状態の密度，$N_s$ はブラント・バイサラ振動数である．

# 非弾性近似の利点

仮定 I の下での状態方程式

$$\rho_0 = \frac{P}{R\Theta}(1 - \alpha_2 z)^{1/\kappa - 1} \tag{10}$$

より圧縮性流体.

スケールアナリシスによって

連続の式に dρ /dt の項がなくなる

↓

解に音波を記述しない

ただし

浮力の項には密度変化が残っている.

# 仮定 II

- ◇鉛直スケール D
  << 等温位大気の高さ H

$$\alpha_2 \equiv \frac{D}{H} \ll 1 \tag{11}$$

- ◇大気はほぼ等温位

$$\alpha_1 \equiv \frac{\theta'}{\Theta} \ll 1 \tag{5}$$

- ◇水平・鉛直速度は音速と比べて非常に小さい

$$\frac{U^2}{C_s^2} \ll 1, \quad \frac{W^2}{C_s^2} \ll 1 \tag{6}$$

# ブシネスク方程式系

各変数を $\alpha_2 = \frac{D}{H}$ で展開し非弾性方程式系に代入 $O(\alpha_2^1)$ の項を集めると

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -c_p \Theta \nabla \Pi' + g \frac{\theta'}{\Theta} \mathbf{k} \qquad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{N_s^2 \Theta}{g} w \qquad (14)$$

# ブシネスク近似の利点

仮定 II の下での状態方程式

$$\rho_0 \simeq \frac{P}{R\Theta} = \mathrm{const.} \tag{15}$$

より非圧縮性流体の連続の式を用いる.

連続の式は dρ /dt の項がない

↓

解に音波を記述しない

ただし

浮力の項には密度変化が残っている.

# モデルの分類

数値モデル

- ◇静力モデル
- ◇非静力モデル
  - ◇弾性系 (音波を含む)
  - ◇非弾性系 (音波を含まない)
    - △非圧縮モデル
      - - ブシネスク方程式
    - △非弾性モデル
      - - 非弾性方程式

# 積雲・積乱雲のスケール

## 水平スケール

| 個々 | $\sim 10$ km |
| --- | --- |
| 複数個 | $10 \sim 1{,}00$ km |

## 鉛直スケール

$$\sim 10 \text{ km}$$

## 運動方程式の鉛直成分

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g$$

大規模スケール：$L \sim 10^6$ m$, H \sim 10^4$ m$, U \sim 10$ m/s,
$W \sim 10^{-2}$ m/s$, \tau \sim 10^5$ s$, \Delta p \sim 10$ hPa

# 扱う対流の種類

鉛直スケールから

- 深い対流：
  - 非弾性方程式で記述される流体の対流
- 浅い対流：
  - ブシネスク方程式で記述される流体の対流

# まとめ

- ◇非弾性方程式系
  - ◇スケールアナリシスによって音波を消去
  - ◇浮力の項に密度変化を残す
- ◇ブシネスク方程式系
  - ◇非圧縮流体の連続の式を用いて音波を消去
  - ◇浮力の項に密度変化を残す

# 今後の課題

- 積雲対流にまつわる基礎勉強
  - 積雲の発達過程
  - 積雲にまつわる現象
- 水なしの深い対流のモデル
  (火星版 deepconv)
- 水あり積雲対流のモデル
- 実際の現象との比較検討

# 参考文献

[1] 小倉義光，1997: メソ気象の基礎理論，東京大学出版会.

[2] 小倉義光，1978: 気象力学通論，東京大学出版会.

[3] Ogura, Y.and N. A. Phillips, 1962: Scale analysis of deep andshallow convection in the atomosphere. J. Atmos. Sci, 19, 173-179.

[4] 斉藤和雄 編，1999: 非静力モデル，気象研究ノート，第 196 号，19-35.

[5] 高橋こう子 et al.，1997:非弾性方程式とブシネスク近似，GFD ノート，http://www.gfd-dennou.org/arch/riron/gfdeqs/anelast/pub/ .