

## 4. 熱輸送と放射

### 4-1 熱輸送の基礎過程

エネルギーフラックス 面積  $dA$  を時間  $dt$  の間に通過するエネルギーが

$$FdAdt$$

と表わされるとき,  $F$  をエネルギーフラックス (エネルギー流束) という.

「単位面積あたりを単位時間あたりに通過するエネルギー量」とも言える.

熱の輸送機構 伝導・対流・放射に大別できる

伝導 粒子の熱運動による.

$$F_{cond} = -k \frac{dT}{dl} \quad (4.1)$$

$F_{cond}$ : 座標軸  $l$  に直交する単位断面積を単位時間あたりに通過する熱量.

$k$ : 熱伝導率 単位  $J K^{-1} m^{-1} s^{-1}$ . 熱の伝わりやすさを表す.

分子運動の場合密度, 比熱, 熱運動速度, 平均自由行程を使って

$$k \approx \frac{1}{3} \rho c_p v_T l. \quad (4.2)$$

これを  $\rho c_p$  で割った量が熱拡散係数 ( $\kappa$ ) 「温度の伝わりやすさ」を表す.

対流圏ではほとんど効かない. 希薄な上層大気 (熱圏) では重要.

対流 流体塊の移動による. 移流とも言う.

熱圏より下部で重要. 流れのスケールや熱の運び方に応じてさらに細分される.

放射 光 (電磁波) を介在.

流体圏のほとんどあらゆる領域で重要. 太陽, 宇宙空間とのエネルギー授受の主役.

## 4-2 熱的な電磁波

物質と光の相互作用 光を時間変化する電場として考える .

吸収 : 電場が物質内の電荷を運動させ , 物質の内部エネルギーが増す .

放出 : 物質内の電荷の運動によって時間変化する電場が生じる .

自発放出 : 周囲の光の存在に関係なく放出

誘導放出 : 光に刺激されて放出

黒体 あらゆる振動数の光を吸収放出できる理想物質 . 0 K で真黒 .

黒体壁 ( $T > 0$ ) で囲まれた空洞内の熱平衡状態 : 放出吸収が釣り合う . この状態にある光が黒体放射 (黒体輻射) . 様々な振動数 , 伝播方向の電磁波からなる .

黒体放射のエネルギー密度 振動数  $\nu \sim \nu + d\nu$  を持つ光の単位体積あたりのエネルギー = 単位体積あたりの独立した電磁振動子の個数  $\times$  1 振動子あたりの平均エネルギー

振動子の個数 空洞を一边  $L$  の立方体とする . 壁面では光は完全吸収 . 定在波として存在できる電場は正整数  $n_x, n_y, n_z$  を使い

$$\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right) e^{i2\pi \nu t} . \quad (4.3)$$

$n_x, n_y, n_z$  の 1 つの組が 2 つの独立振動子 (電場の偏りの独立方向が 2 つ) を表す .  $(n_x, n_y, n_z)$  空間では単位体積あたり 1 つ整数組が存在 . 振動数との関係は波動方程式から

$$\nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (4.4)$$

ここで  $c$  は光の速さ .

範囲  $\nu \sim \nu + d\nu$  を  $(n_x, n_y, n_z)$  空間の範囲に焼き直す

$$2L\nu/c \leq \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \leq 2L(\nu + d\nu)/c . \quad (4.5)$$

これは  $(n_x, n_y, n_z)$  空間における半径  $2L\nu/c$  , 厚さ  $2Ld\nu/c$  の 1/8 球殻を表す . この球殻内の整数組の個数はこの球殻体積に等しく ,  $4\pi L^3 \nu^2 d\nu / c^3$  . この倍が一边  $L$  の立方体内の独立振動子の個数 . 単位体積あたりでは

$$8\pi \nu^2 d\nu / c^3 . \quad (4.6)$$

1 振動子の平均エネルギー 振動数  $\nu$  の各独立振動子のとりうるエネルギー  $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$  (光の量子性) . 統計力学の基本法則から , エネルギー  $nh\nu$  にある確率は

$$\propto \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)$$

よってエネルギーの平均値  $\langle \varepsilon_\nu \rangle$  は

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}. \quad (4.7)$$

計算を実行すると

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (4.8)$$

従って振動数  $\nu \sim \nu + d\nu$  を持つ光の単位体積当たりのエネルギーは

$$U(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu. \quad (4.9)$$

これをプランクの輻射式という .

### 4-3 放射伝達の方程式

放射強度 面積  $dA$  を立体角要素  $d\Omega$  の方向に時間  $dt$  に通過する振動数  $\nu \sim \nu + d\nu$  の光のエネルギーを

$$I_\nu \cos \theta dA d\Omega dt d\nu \quad (4.10)$$

と表す . ここで  $\theta$  は  $dA$  の法線方向と立体角要素のなす角 . 単位は  $\text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} = \text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1}$  .  $I_\nu$  を放射強度 (radiation intensity) という .

$dA$  を通過する全放射エネルギーフラックスは

$$F = \int \int I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu = \int F_\nu d\nu \quad (4.11)$$

ここで  $F_\nu = \int I \cos \theta d\Omega$  は振動数当たりの放射エネルギーフラックス .

エネルギー密度との関係 単位振動数 , 単位体積あたりに立体角  $d\Omega$  の方向に進んでいる光のエネルギー密度を  $u_\nu$  . 断面積  $dA$  , 長さ  $cdt$  の円筒内部のエネルギーは

$$u_\nu dA cdt. \quad (4.12)$$

この光は  $dt$  の間に  $dA$  を通過するから

$$I_\nu dt dA = u_\nu dA cdt. \quad (4.13)$$

よって

$$I_\nu = u_\nu c \quad (4.14)$$

黒体放射の場合， $u_\nu$  の全立体角積分はプランクの輻射式に等しい．このとき放射は等方的なので  $\int I_\nu d\Omega = 4\pi I_\nu$  従って

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} U(\nu, T) \quad (4.15)$$

この時の  $I_\nu$  を以後  $B_\nu(T)$  と記す

$$B_\nu(T) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (4.16)$$

これをプランク関数という．

放射伝達 物質中を伝播する光は吸収によって減衰したり，放出によって強くなったりする．

密度  $\rho$  の物質中を微小距離  $ds$  通過したときの放射強度の変化を  $dI_\nu$  とすると

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \quad (4.17)$$

$\kappa_\nu$  を質量吸収係数， $j_\nu$  を放出係数と呼ぶ．共に  $\nu$  の関数．これを放射伝達の方程式と言う（ここでは簡単のため散乱を無視）．

キルヒホッフの法則 局所熱平衡が成立している時には

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (4.18)$$

が成立．つまり光を吸収しやすい物質は，同時に光を放出しやすい．

導出：物質系が一様温度  $T$  の熱平衡状態にあるとする．このとき放射強度は至るところでプランク関数に等しくなる．そのため任意の光路について

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds = 0 \quad (4.19)$$

さらに  $I_\nu = B_\nu(T)$  を用いて (4.17) を得る．

局所熱平衡の仮定は考えている放射場の等価温度と物質の温度が近く，十分な高い頻度で分子間，分子-光子間衝突が生じているときに良い近似．地球では高度約 100km 以下，赤外放射の波長域において成立している．

## 問題

4.1 プランク関数 ((4.16) の  $B_\nu(T)$ ) について以下の問に答えよ .

- (1) プランク関数からステファン-ボルツマンの法則を導きなさい . 積分公式  $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^4}{15}$  を用いてよい .
- (2) 放射強度を振動数の代わりに波長を用いて表現することもよくおこなわれる . すなわち面積  $dA$  を立体角要素  $d\Omega$  の方向に時間  $dt$  に通過する波長  $\lambda \sim \lambda + d\lambda$  の光のエネルギーを

$$I_\lambda \cos \theta dA d\Omega dt d\lambda \quad (4.20)$$

と表現する . 黒体放射の場合には

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]} \quad (4.21)$$

と表されることを示しなさい .

- (3) 温度  $T$  を固定したときに , 波長で表したプランク関数 (4.21) の最大値を与える波長は近似的に  $3000/T(\text{K}) \mu\text{m}$  で表されることを示しなさい .
- (4)  $T = 250 \text{ K}$  および  $6000 \text{ K}$  の場合について , 波長で表したプランク関数の波長依存性を表すグラフを描きなさい . ただし関数値はそれぞれの温度における最大値で規格化したものをプロットしなさい .

4.2 (4.17) 式について以下の問に答えよ .

- (1)  $\kappa_\nu$  の単位を求めよ .
- (2) 放出係数が無視できるとき ,  $d\tau = \rho \kappa_\nu ds$  と置けば

$$\frac{dI_\nu}{d\tau} = -I_\nu$$

が成り立つことを示しなさい . またこのとき  $\tau = 0$  で  $I_\nu = I_0$  を満たす解を求めなさい .