5. 放射平衡

5-1 エネルギー平衡

部分系のエネルギー変化 エネルギー流入量と流出量の差が部分系のエネルギー変化.

$$\frac{d}{dt}\int_V e dV = -\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5.1}$$

e は単位体積当たりのエネルギー，$\boldsymbol{F}$ はエネルギーフラックス.

$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} > 0$ のとき流出，$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} < 0$ のとき流入.

エネルギー平衡の状態 流入量と流出量が一致した状態

c.f. 地球の大気と海洋は大局的にはエネルギー平衡の状態にある.

放射平衡 エネルギー輸送のメカニズムが放射過程のみの場合に実現されるエネルギー平衡．大気の温度構造を支配.

$$F = \int_{\text{単位半球}} d\Omega \int d\nu \cos\theta I_\nu(\theta,\phi)$$

5-2 一次元放射平衡解

平行平板灰色大気 放射平衡にある大気の温度分布がどう決まるか調べるための有用なモデル．次の仮定をおく.

- 平行平板大気 (ただし等温ではない 第 4 回参照)
- 局所熱力学平衡 (キルヒホッフの法則が成立)
- 惑星放射に対する吸収係数は波長に依らず一定 (灰色)
- 太陽放射に対しては透明

地面に一度吸収された熱が放射によって大気上層へどう伝達されるか調べ，放射平衡にあるときの鉛直温度分布を求める.

基礎方程式

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \tag{5.2}$$

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \tag{5.3}$$

これを振動数空間で積分 $I = \int I_\nu d\nu$ とおいて

$$dI = -\kappa\rho I ds + \kappa\rho B(T) ds \tag{5.4}$$

ここで $B(T)$ はプランク関数を振動数積分したもので

$$B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \tag{5.5}$$

光学的深さ 大気の不透明度を以下のように表現．鉛直上向きに z 座標をとり

$$\tau(z) = \int_z^\infty \rho\kappa dz. \tag{5.6}$$

これを大気上端から計った光学的深さという．

地表まで積分したものを，大気の全光学的深さ，という．

座標の変換 放射伝達方程式 (5.4) 式を τ を用いて書き直す．天頂角を θ とすると

$$ds = dz/\cos\theta \tag{5.7}$$

また光学的深さの定義式を微分形で表すと $d\tau = -\kappa\rho dz$ なので

$$\kappa\rho ds = -d\tau/\cos\theta \tag{5.8}$$

ゆえに (5.4) 式は

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau} = I - B(T) \tag{5.9}$$

2 方向近似 (5.9) 式中の I は τ と天頂角と方位角の関数．これを上向きと下向きの 2 方向に自由度を落す．

もともと地面の熱放射が伝達される問題なので

- I は方位角にはよらない
- 上向き $(0 < \theta < \pi/2)$，下向き $(\pi/2 < \theta < \pi)$ それぞれで天頂角依存性は小さい．それぞれ I_+, I_- とする．

$$F_{up} = \int_{\text{上半球}} d\Omega \cos\theta I = \pi I_+ \tag{5.10}$$

$$F_{down} = -\int_{\text{下半球}} d\Omega \cos\theta I = \pi I_- \tag{5.11}$$

とすると，$\int d\Omega(5.9) \times \cos\theta$ より

$$\frac{2}{3}\frac{dF_{up}}{d\tau} = F_{up} - \pi B \tag{5.12}$$

$$-\frac{2}{3}\frac{dF_{down}}{d\tau} = F_{down} - \pi B \tag{5.13}$$

放射平衡の条件 $\tau \sim \tau + d\tau$ の気層のエネルギーの釣合は

$$0 = [\text{流入}] - [\text{流出}] = [F_{up}(\tau + d\tau) + F_{down}(\tau)] - [F_{up}(\tau) + F_{down}(\tau + d\tau)] \tag{5.14}$$

整理して

$$F_{up}(\tau + d\tau) - F_{down}(\tau + d\tau) = F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) \tag{5.15}$$

したがって

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \text{一定} \tag{5.16}$$

が放射平衡の条件．大気上端 ($\tau = 0$) では $F_{down} = 0$，$F_{up} =$ 宇宙空間へ逃げる総放射エネルギーフラックス．有効温度を用いて

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \sigma T_{eff}^4$$

微分方程式を解く (5.12)+(5.13) を作ると (5.16) から左辺は消えて

$$0 = F_{up} + F_{down} - 2\pi B(T). \tag{5.17}$$

(5.12)-(5.13) を作ると

$$\frac{2}{3}\frac{d(F_{up} + F_{down})}{d\tau} = \sigma T_{eff}^4. \tag{5.18}$$

この右辺は一定値なので

$$F_{up} + F_{down} = \frac{3}{2}\sigma T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3}\right) \tag{5.19}$$

ここで $\tau = 0$ で $F_{up} = \sigma T_{eff}^4, F_{down} = 0$ の条件を用いた．

(5.17) 式から

$$\pi B(T) = \sigma T(\tau)^4 = \frac{1}{2}\sigma T_{eff}\left(\frac{3}{2}\tau + 1\right) \tag{5.20}$$

これで大気の温度分布が光学的深さの関数として解けた．

5-3 対流調節

放射平衡解の地表温度ギャップ 地表面でのエネルギーの釣合を考えると

$$\text{地表の放つ上向き放射} = \text{太陽放射} + \text{大気の下向き放射}$$

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + F_{down}(\tau_{total}) \tag{5.21}$$

ゆえに

$$\sigma T_s^4 = \frac{1}{2}\sigma T_{eff}^4\left(\frac{3}{2}\tau + 2\right) \tag{5.22}$$

よって $T_s > T(\tau_{total})$

対流の発生 地面と熱交換した気体塊は周囲よりも高温で低密度→鉛直対流が生じる．軽い気体塊上昇．大気の温度分布を変化させる．

対流調節 浮上する気塊は断熱膨張．このときの温度の高度分布を以下導出．

熱力学の第一法則 $dQ = 0$(断熱) とすると 1mol あたり

$$C_v dT = -PdV \tag{5.23}$$

分子量を μ とすれば $V = \mu/\rho$，$P = \rho RT/\mu$ なので

$$C_v dT = RT d\rho/\rho \tag{5.24}$$

静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{5.25}$$

を変形

$$RdT + RT d\rho/\rho = -\mu g dz \tag{5.26}$$

これに (5.24) を代入して

$$(C_v + R)dT = -\mu g dz \tag{5.27}$$

よって温度分布は

$$\frac{dT}{dz} = -\mu g/C_p \tag{5.28}$$

比熱が一定であれば

$$T = T_s - \frac{\mu g}{C_p} z$$

どの高度レベルまで対流するかは，惑星放射と太陽放射のバランスが保たれるという条件から決まる．