

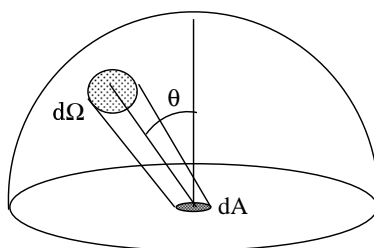
## 5. 熱輸送過程としての放射

### 5-3 放射伝達の方程式

放射強度 面積  $dA$  を立体角要素  $d\Omega$  の方向に時間  $dt$  に通過する振動数  $\nu \sim \nu + d\nu$  の電磁波のエネルギーを

$$I_\nu \cos \theta dA d\Omega dt d\nu \quad (5.10)$$

と表す．ここで  $\theta$  は  $dA$  の法線方向と立体角要素のなす角．単位は  $\text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} = \text{J m}^{-2} \text{sr}^{-1}$ ． $I_\nu$  を放射強度 (radiation intensity) という．



$dA$  を通過する全放射エネルギーフラックスは

$$F = \int \int I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu = \int F_\nu d\nu \quad (5.11)$$

ここで  $F_\nu = \int I \cos \theta d\Omega$  は単位振動数当たりの放射エネルギーフラックス．

エネルギー密度との関係 単位振動数，単位体積あたりに立体角  $d\Omega$  の方向に進んでいる電磁波のエネルギー密度を  $u_\nu$  とする．このとき断面積  $dA$ ，長さ  $cdt$  の円筒内部のエネルギーは

$$u_\nu dA c dt. \quad (5.12)$$

この光は  $dt$  の間に  $dA$  を通過するから

$$I_\nu dt dA = u_\nu dA c dt. \quad (5.13)$$

よって

$$I_\nu = u_\nu c \quad (5.14)$$

黒体放射の場合， $u_\nu$  の全立体角積分はプランクの輻射式に等しい．このとき放射は等方的なので  $\int I_\nu d\Omega = 4\pi I_\nu$  従って

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} U(\nu, T) \quad (5.15)$$

この時の  $I_\nu$  を以後  $B_\nu(T)$  と記す

$$B_\nu(T) = \frac{2}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (5.16)$$

これをプランク関数という.

放射伝達 物質中を伝播する電磁波は吸収によって減衰したり, 放出によって強くなったりする.

密度  $\rho$  の物質中を微小距離  $ds$  通過したときの放射強度の変化を  $dI_\nu$  とすると

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \quad (5.17)$$

$\kappa_\nu$  を質量吸収係数,  $j_\nu$  を放出係数と呼ぶ. 共に  $\nu$  の関数. これを放射伝達の方程式と言う (ここでは簡単のため散乱を無視).

キルヒホッフの法則 局所熱平衡が成立している時には

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \quad (5.18)$$

が成立. つまり電磁波を吸収しやすい物質は, 同時に光を放出しやすい.

導出: 物質系が一様温度  $T$  の熱平衡状態にあるとする. このとき放射強度は至るところでプランク関数に等しい. そのため任意の光路について

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds = 0 \quad (5.19)$$

さらに  $I_\nu = B_\nu(T)$  を用いてキルヒホッフの法則 (5.18) を得る.

局所熱平衡の仮定は考えている放射場の等価温度と物質の温度が近く, 十分高い頻度で分子間, 分子-光子間衝突が生じているときに良い近似. 地球では高度約 100km 以下, 赤外放射の波長域において成立っている.

## 6. 放射平衡

### 6-1 エネルギー平衡

部分系のエネルギー変化 エネルギー流入量と流出量の差が部分系 (体積  $V$ , 表面積  $A$ ) のエネルギー変化.

$$\frac{d}{dt} \int_V e dV = - \int_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.1)$$

$e$  は単位体積当たりのエネルギー,  $\mathbf{F}$  はエネルギーフラックス.

$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} > 0$  のとき流出,  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} < 0$  のとき流入.

エネルギー平衡の状態 流入量と流出量が一致した状態

c.f. 地球の大気と海洋は大局的にはエネルギー平衡の状態にある .

放射平衡 エネルギー輸送のメカニズムが放射過程のみの場合に実現されるエネルギー平衡 . 大気の温度構造を支配 .

$$F = \int_{\text{単位半球}} d\Omega \int dv \cos \theta I_v(\theta, \phi)$$

## 6-2 一次元放射平衡解

平行平板灰色大気 放射平衡にある大気の温度分布がどう決まるか調べるための有用なモデル . 次の仮定をおく .

- 平行平板大気 (ただし等温ではない 第4回参照)
- 局所熱力学平衡 (キルヒホッフの法則が成立)
- 惑星放射に対する吸収係数は波長に依らず一定 (灰色)
- 太陽放射に対しては透明

地面に一度吸収された熱が放射によって大気上層へどう伝達されるか調べ , 放射平衡にあるときの鉛直温度分布を求める .

基礎方程式

$$dI_v = -\kappa_v \rho I_v ds + \rho j_v ds \quad (6.2)$$

$$j_v = \kappa_v B_v(T) \quad (6.3)$$

これを振動数空間で積分  $I = \int I_v dv$  とおいて

$$dI = -\kappa \rho I ds + \kappa \rho B(T) ds \quad (6.4)$$

ここで  $B(T)$  はプランク関数を振動数積分したもので

$$B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (6.5)$$

光学的深さ 大気の不透明度を以下のように表現 . 鉛直上向きに  $z$  座標をとり

$$\tau(z) = \int_z^{\infty} \rho \kappa dz. \quad (6.6)$$

これを大気上端から計った光学的深さという .

地表まで積分したものを , 大気的全光学的深さ , という .

座標の変換 放射伝達方程式 (6.4) 式を  $\tau$  を用いて書き直す．天頂角を  $\theta$  とすると

$$ds = dz / \cos \theta \quad (6.7)$$

また光学的深さの定義式を微分形で表すと  $d\tau = -\kappa\rho dz$  なので

$$\kappa\rho ds = -d\tau / \cos \theta \quad (6.8)$$

ゆえに (6.4) 式は

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B(T) \quad (6.9)$$

2 方向近似 (6.9) 式中の  $I$  は  $\tau$  と天頂角と方位角の関数．これを上向きと下向きの 2 方向に自由度を落す．

もともと地面の熱放射が伝達される問題なので

- $I$  は方位角にはよらない
- 上向き ( $0 < \theta < \pi/2$ ) , 下向き ( $\pi/2 < \theta < \pi$ ) それぞれで天頂角依存性は小さい．それぞれ  $I_+$ ,  $I_-$  とする．

$$F_{up} = \int_{\text{上半球}} d\Omega \cos \theta I = \pi I_+ \quad (6.10)$$

$$F_{down} = - \int_{\text{下半球}} d\Omega \cos \theta I = \pi I_- \quad (6.11)$$

とすると ,  $\int d\Omega (6.9) \times \cos \theta$  より

$$\frac{2}{3} \frac{dF_{up}}{d\tau} = F_{up} - \pi B \quad (6.12)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{dF_{down}}{d\tau} = F_{down} - \pi B \quad (6.13)$$

放射平衡の条件  $\tau \sim \tau + d\tau$  の気層のエネルギーの釣合は

$$0 = [\text{流入}] - [\text{流出}] = [F_{up}(\tau + d\tau) + F_{down}(\tau)] - [F_{up}(\tau) + F_{down}(\tau + d\tau)] \quad (6.14)$$

整理して

$$F_{up}(\tau + d\tau) - F_{down}(\tau + d\tau) = F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) \quad (6.15)$$

したがって

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \text{一定} \quad (6.16)$$

が放射平衡の条件．大気上端 ( $\tau = 0$ ) では  $F_{down} = 0$  ,  $F_{up} =$  宇宙空間へ逃げる総放射エネルギーフラックス．有効温度を用いて

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \sigma T_{eff}^4$$

微分方程式を解く (6.12)+(6.13) を作ると (6.16) から左辺は消えて

$$0 = F_{up} + F_{down} - 2\pi B(T). \quad (6.17)$$

(6.12)-(6.13) を作ると

$$\frac{2}{3} \frac{d(F_{up} + F_{down})}{d\tau} = \sigma T_{eff}^4. \quad (6.18)$$

この右辺は一定値なので

$$F_{up} + F_{down} = \frac{3}{2} \sigma T_{eff}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \quad (6.19)$$

ここで  $\tau = 0$  で  $F_{up} = \sigma T_{eff}^4$ ,  $F_{down} = 0$  の条件を用いた .

(6.17) 式から

$$\pi B(T) = \sigma T(\tau)^4 = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left( \frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (6.20)$$

これで大気温度分布が光学的深さの関数として解けた .

### 6-3 対流調節

放射平衡解の地表温度ギャップ 地表面でのエネルギーの釣合を考えると

地表の放つ上向き放射 = 太陽放射 + 大気の下向き放射

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + F_{down}(\tau_{total}) \quad (6.21)$$

ゆえに

$$\sigma T_s^4 = \frac{1}{2} \sigma T_{eff}^4 \left( \frac{3}{2} \tau + 2 \right) \quad (6.22)$$

よって  $T_s > T(\tau_{total})$

対流の発生 地面と熱交換した気体塊は周囲よりも高温で低密度 鉛直対流が生じる . 軽い気体塊上昇 . 大気温度分布を変化させる .

対流調節 浮上する気塊は断熱膨張 . このときの温度の高度分布を以下導出 .

熱力学の第一法則  $dQ = 0$  (断熱) とすると 1mol あたり

$$C_v dT = -P dV \quad (6.23)$$

分子量を  $\mu$  とすれば  $V = \mu/\rho$  ,  $P = \rho RT/\mu$  なので

$$C_v dT = RT d\rho/\rho \quad (6.24)$$

静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (6.25)$$

を変形

$$RdT + RTd\rho/\rho = -\mu g dz \quad (6.26)$$

これに (5.24) を代入して

$$(C_v + R)dT = -\mu g dz \quad (6.27)$$

よって温度分布は

$$\frac{dT}{dz} = -\mu g / C_p \quad (6.28)$$

比熱が一定であれば

$$T = T_s - \frac{\mu g}{C_p} z$$

どの高度レベルまで対流するかは、惑星放射と太陽放射のバランスが保たれるという条件から決まる。