4. 静水圧平衡とスケールハイト

4–1 基礎事項と方程式

圧力 単位面積あたりに働く力．単位 Pa=N/m^2=J/m^3．単位体積当たりのエネルギーという解釈も可．

鉛直方向 重力加速度と平行な方向．重力加速度と同じ向きを鉛直下向き，反対向きを鉛直上向きという．

器に張った流体：静止状態では表面は鉛直方向と直交．水平方向．

密度一定の静止流体層 密度 ρ，深さ d，重力加速度 g．底の圧力 P は

$$P = \rho g d \tag{4.1}$$

流体層の底に限らず，任意の深さでの圧力がこれで表現できる．静水圧平衡の積分表現．

流体表面が鉛直方向に垂直でない場合，水平方向に圧力の強弱．流れが生じる．惑星の流体圏での力の釣合いは静水圧平衡がもっとも大きく寄与．流れを作る力はこれに比べて小さい．

微分形 密度・重力：一般に変数

座標 z：鉛直上向き，

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{4.2}$$

これを**静水圧平衡の式**と言う．ガス惑星や星の内部まで含めて表したいときには座標 z を中心からの距離 r に置換えて表現．

4–2 等温平行平板大気

簡単だが大気の構造を解析するために有効なモデル

- 状態方程式が理想気体のそれに従う (常温付近では数十気圧以下で良い近似)
- 等温等組成
- 惑星半径に比べて厚みが薄い (平行平板の仮定)

- 自己重力無視 (大気中の重力加速度一様)

状態方程式

$$PV = NRT \tag{4.3}$$

ここで N はモル数.

使いやすく変形. 1 mol あたりの気体の質量を μ とすると $N = V\rho/\mu$ であるから,

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT \tag{4.4}$$

静水圧平衡解 状態方程式 (4.4) を使い静水圧平衡の式 (4.2) から密度を消去.

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} P \tag{4.5}$$

重力一定としてこれを解く (境界条件 $P = P_0$ at $z = z_0$)

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-\mu g(z - z_0)}{RT}\right] \tag{4.6}$$

ここで

$$H = \frac{RT}{\mu g} \tag{4.7}$$

とすると平衡解は

$$P = P_0 \exp\left[\frac{-(z - z_0)}{H}\right] \tag{4.8}$$

スケールハイト (4.7) 式の H をスケールハイトという. 圧力が $1/e$ に減少する高度を表す. 大気の厚みを表す尺度.

(4.7) 式を変形すると

$$mgH = kT \tag{4.8}$$

ここで m は分子 1 個の質量. $R = N_A k$, $\mu = N_A m$ (N_A はアボガドロ数) に注意.

スケールハイトの分子運動論的解釈:(4.8) から分子の熱的な並進運動のエネルギーと位置エネルギーとがほぼ等しくなる高さと解釈できる.

また温度・分子量・重力加速度が一定でない場合

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dz} = -\frac{1}{H(z)} \tag{4.9}$$

$$H(z) = \frac{RT(z)}{\mu(z)g(z)} \tag{4.10}$$

が成立. 各高度での H の値を局所スケールハイトという.

4–3 外気圏

(4.6) 式では $z \to \infty$ でないかぎり $P \neq 0$．しかし P の極めて小さな希薄状態は流体とはみなせない．

気体が流体とみなせる条件 平均自由行程 << 系の特徴的な長さの尺度

平均自由行程：気体分子が他の分子に衝突するまで自由に並進する平均距離 l で表すと近似的に

$$n\sigma l = 1 \tag{4.11}$$

から計算．ここで n は気体数密度，σ は分子の衝突断面積．

$$l = H \tag{4.12}$$

となる高度レベルを惑星の外気圏界面と呼ぶ．これより外側を外気圏 (または外圏) と呼ぶ．より内側がいわゆる大気圏に相当．

4–4 大気の安定性

熱的散逸 大気分子の熱運動

- 気塊中の分子の大部分が脱出可能な熱運動エネルギーを持つ場合：流体力学的散逸

$$\frac{kTr}{2GMm} = \frac{v_T^2}{v_{esc}^2} > 1$$

$$v_T = \left(\frac{2kT}{m}\right)^2$$

ここで m は分子 1 個の質量．

- 大部分は脱出可能な熱運動エネルギーを持たない場合：ジーンズエスケープ

ジーンズエスケープ 外気圏界面に存在する気体分子のうち，脱出速度を越える並進速度を持つ成分が散逸．分子の速度分布はマックスウェルの速度分布則．このとき散逸フラックス (外気圏界面単位表面積，単位時間あたりに宇宙空間に失われる分子数)ϕ_{esc} は

$$\phi_{esc} = \int_{|\boldsymbol{v}|\geq v_{esc}, v_z\geq 0} v_z f(\boldsymbol{v}) d^3\boldsymbol{v} \tag{4.13}$$

から計算．f はマックスウェルの分布関数

$$f(\boldsymbol{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right] \tag{4.14}$$

計算を実行すると

$$\phi_{esc} = n\frac{v_T}{2\pi^{1/2}}(1+\lambda)e^{-\lambda} \tag{4.15}$$

ただし

$$\lambda = \frac{mv_{esc}^2}{2kT} = \frac{v_{esc}^2}{v_T^2}$$

λ を散逸パラメータと呼ぶ．

レポート問題

以下の問いについて，導出過程も含めて過不足なくまとめること．そのためのコツのひとつに式変形は文字式で行い，数値の代入は一番最後に行うことがあげられる．数値の算出には電卓等を用いても構わない．締め切り 5/17.

1. 気温が a) 高度によらずに一定の場合と， b) 高度 1 km あたり 10 K 減少する場合のそれぞれについて，気圧が 500 hPa となる高度を求めよ．ただし地表面圧力は 1000 hPa，地表面気温は 300 K，大気の平均分子量は 30 g mol^{-1}，重力加速度は 10 m s^{-2} とする．

2. 非圧縮流体からなる半径 R の天体内部での圧力分布を考える．簡単のため自転や流体の運動の影響は無視できるものとする．

(1) 密度が一様な場合について，惑星中心からの距離 $r(< R)$ の位置における重力加速度を密度 ρ と r を用いて表しなさい．必要な物理定数等は適宜導入して構わない．

(2)(1) の場合について静水圧平衡の式を書き下し，それを解いて天体内部の圧力を r の関数として求めなさい．ただし表面 $(r = R)$ における圧力は 0 とする．

(3) この惑星が平均密度を保ったまま密度 ρ_c の核と密度 ρ_m のマントルに分化したとする $(\rho_c > \rho > \rho_m)$．このとき中心圧力は分化前と比べて増加するか減少するか調べよ．

3. 外気圏に関する以下の問いに答えなさい．

(1) (4.15) 式を導け (ヒント：円筒座標を導入．積分範囲に注意).

(2) 問題 1. の大気 a）の場合について外気圏界面の高度を求めよ．分子の衝突断面積を $\sigma = 1 \times 10^{-19}$ m^2 とする．