6. 放射平衡（続き）

6-2 一次元放射平衡解

平行平板灰色大気 放射平衡にある大気の温度分布がどう決まるか調べるための有用なモデル．次の仮定をおく．

- 平行平板大気 (ただし等温ではない 第 4 回参照)
- 局所熱力学平衡 (キルヒホッフの法則が成立)
- 惑星放射に対する吸収係数は波長に依らず一定 (灰色)
- 太陽放射に対しては透明

地面に一度吸収された熱が放射によって大気上層へどう伝達されるか調べ，放射平衡にあるときの鉛直温度分布を求める．

基礎方程式

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds + \rho j_\nu ds \tag{6.2}$$

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T) \tag{6.3}$$

これを振動数空間で積分 $I = \int I_\nu d\nu$ とおいて

$$dI = -\kappa\rho I ds + \kappa\rho B(T) ds \tag{6.4}$$

ここで $B(T)$ はプランク関数を振動数積分したもので

$$B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \tag{6.5}$$

光学的深さ 大気の不透明度を以下のように表現．鉛直上向きに z 座標をとり

$$\tau(z) = \int_z^\infty \rho\kappa dz. \tag{6.6}$$

これを大気上端から計った光学的深さという．

地表まで積分したものを，大気の全光学的深さ，という．

座標の変換 放射伝達方程式 (6.4) 式を τ を用いて書き直す．天頂角を θ とすると

$$ds = dz/\cos\theta \tag{6.7}$$

また光学的深さの定義式を微分形で表すと $d\tau = -\kappa\rho dz$ なので

$$\kappa\rho ds = -d\tau/\cos\theta \tag{6.8}$$

ゆえに (6.4) 式は

$$\cos\theta\frac{dI}{d\tau} = I - B(T) \tag{6.9}$$

2 方向近似 (6.9) 式中の I は τ と天頂角と方位角の関数．これを上向きと下向きの 2 方向に自由度を落す．

もともと地面の熱放射が伝達される問題なので

- I は方位角にはよらない
- 上向き $(0 < \theta < \pi/2)$，下向き $(\pi/2 < \theta < \pi)$ それぞれで天頂角依存性は小さい．それぞれ I_+, I_- とする．

$$F_{up} = \int_{\text{上半球}} d\Omega\cos\theta I = \pi I_+ \tag{6.10}$$

$$F_{down} = -\int_{\text{下半球}} d\Omega\cos\theta I = \pi I_- \tag{6.11}$$

とすると，$\int d\Omega(6.9)\times\cos\theta$ より

$$\frac{2}{3}\frac{dF_{up}}{d\tau} = F_{up} - \pi B \tag{6.12}$$

$$-\frac{2}{3}\frac{dF_{down}}{d\tau} = F_{down} - \pi B \tag{6.13}$$

放射平衡の条件 $\tau \sim \tau + d\tau$ の気層のエネルギーの釣合は

$$0 = [\text{流入}] - [\text{流出}] = [F_{up}(\tau + d\tau) + F_{down}(\tau)] - [F_{up}(\tau) + F_{down}(\tau + d\tau)] \tag{6.14}$$

整理して

$$F_{up}(\tau + d\tau) - F_{down}(\tau + d\tau) = F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) \tag{6.15}$$

したがって

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \text{一定} \tag{6.16}$$

が放射平衡の条件．大気上端 $(\tau = 0)$ では $F_{down} = 0$，F_{up} = 宇宙空間へ逃げる総放射エネルギーフラックス．有効温度を用いて

$$F_{up}(\tau) - F_{down}(\tau) = \sigma T_{eff}^4$$

微分方程式を解く (6.12)+(6.13) を作ると (6.16) から左辺は消えて

$$0 = F_{up} + F_{down} - 2\pi B(T). \tag{6.17}$$

(6.12)-(6.13) を作ると

$$\frac{2}{3}\frac{d(F_{up} + F_{down})}{d\tau} = \sigma T_{eff}^4. \tag{6.18}$$

この右辺は一定値なので

$$F_{up} + F_{down} = \frac{3}{2}\sigma T_{eff}^4\left(\tau + \frac{2}{3}\right) \tag{6.19}$$

ここで $\tau = 0$ で $F_{up} = \sigma T_{eff}^4, F_{down} = 0$ の条件を用いた.

(6.17) 式から

$$\pi B(T) = \sigma T(\tau)^4 = \frac{1}{2}\sigma T_{eff}\left(\frac{3}{2}\tau + 1\right) \tag{6.20}$$

これで大気の温度分布が光学的深さの関数として解けた.

放射平衡解の地表温度ギャップ 地表面でのエネルギーの釣合を考えると

地表の放つ上向き放射 = 太陽放射 + 大気の下向き放射

$$\sigma T_s^4 = \sigma T_{eff}^4 + F_{down}(\tau_{total}) \tag{6.21}$$

ゆえに

$$\sigma T_s^4 = \frac{1}{2}\sigma T_{eff}^4\left(\frac{3}{2}\tau + 2\right) \tag{6.22}$$

よって $T_s > T(\tau_{total})$.

放射平衡解は対流不安定.

6-3 対流調節

対流の発生 地面と熱交換した気体塊は周囲よりも高温で低密度→鉛直対流が生じる．軽い気体塊上昇．大気の温度分布を変化させる．

対流調節 浮上する気塊は断熱膨張．このときの温度の高度分布を以下導出.

熱力学の第一法則 $dQ = 0$(断熱) とすると 1mol あたり

$$C_v dT = -PdV \tag{6.23}$$

分子量を μ とすれば $V = \mu/\rho$，$P = \rho RT/\mu$ なので

$$C_v dT = RT d\rho/\rho \tag{6.24}$$

静水圧平衡の式

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \tag{6.25}$$

を変形

$$RdT + RTd\rho/\rho = -\mu g dz \tag{6.26}$$

これに (5.24) を代入して

$$(C_v + R)dT = -\mu g dz \tag{6.27}$$

よって温度分布は

$$\frac{dT}{dz} = -\mu g/C_p \tag{6.28}$$

比熱が一定であれば

$$T = T_s - \frac{\mu g}{C_p} z$$

どの高度レベルまで対流するかは，惑星放射と太陽放射のバランスが保たれるという条件から決まる．

レポート問題

以下の問いについて，導出過程も含めて過不足なくまとめること．第三者が読んで分かる記述を心がけられたい．数値の算出やグラフの作成等に計算機等を用いても構わない．またワープロソフトの利用も歓迎する．締め切り 6/14.

1. プランク関数 ((5.16) の $B_\nu(T)$) について以下の問に答えよ．

(1) プランク関数からステファン-ボルツマンの法則を導きなさい．積分公式 $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$ を用いてよい．

(2) 放射強度を振動数の代わりに波長を用いて表現することもよくおこなわれる．すなわち面積 dA を立体角要素 $d\Omega$ の方向に時間 dt に通過する波長 $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ の光のエネルギーを

$$I_\lambda \cos\theta dA d\Omega dt d\lambda \tag{5.20}$$

と表現する．黒体放射の場合には

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}. \tag{5.21}$$

と表されることを示しなさい．

(3) 温度 T を固定したときに，波長で表したプランク関数 (5.21) の最大値を与える波長は近似的に $3000/T(\mathrm{K})\ \mu\mathrm{m}$ で表されることを示しなさい．

(4) $T = 250$ K および 6000 K の場合について，波長で表したプランク関数の波長依存性を表すグラフを描きなさい．ただし関数値はそれぞれの温度における最大値で規格化したものをプロットしなさい．

2. 平行平板灰色大気について以下の問いに答えなさい．

(1) 全光学的深さが 2/3 であるとする．このときの吸収係数 κ_ν の値を求めよ．ただし地表面気圧は 1 気圧とし，重力加速度は 10 m s^{-2} とする．

(2) この大気の有効温度が 255 K であるとき，地表面温度と地表面直上の気温を求めなさい．ただし温度分布は放射平衡によって定まるものとする．

(3) この大気中で液体の水が存在できる気圧範囲を求めなさい．