Ⅰ 数学

以下の３問において、問題Ⅰ－１は必答し、問題Ⅰ－２と問題Ⅰ－３はどちらか１問を選択して解答せよ.

問題Ⅰ－１（必答）

問１　３次元直角直線座標系（x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする）における, 次のベクトル場 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について以下の小問に答えよ.

$$\mathbf{A} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$$

小問１－１　$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が各点で直交していることを示せ.
小問１－２　２つのベクトル場 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ.
小問１－３　ベクトル場 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ それぞれを x-y 平面に図示せよ（略図で良い）.

問２　３次元直角直線座標系（x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とする）における, 次のベクトル $\mathbf{A}$ について以下の小問に答えよ.

$$\mathbf{A} = (6xy + z^3)\mathbf{i} + (3x^2 - z)\mathbf{j} + (3xz^2 - y)\mathbf{k}$$

小問２－１　$\mathbf{A}$ が $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$ を満たすことを示せ.
小問２－２　$\mathbf{A} = \nabla\varphi$ となる関数 φ を求めよ.

問３　ベクトル空間 $\mathbf{v}$ 内で、３次元空間中のある閉領域 V とその境界面 S について, 以下の関係をガウスの定理という.

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\, \mathbf{v}\, dV$$

ここで, $\mathbf{n}$ は S の外側に向かう単位法線ベクトルを表す.
ベクトル場 $\mathbf{v}$ が, 位置ベクトル $\mathbf{r}$ (大きさ r)を用いて $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ と表される時, 原点を中心とした半径 a の球について, この定理の成立することを示せ.

問題Ⅰ－2（選択）

問1　次の行列の行列式を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

問2　次の行列の行列式を計算せよ．

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & k \end{pmatrix}$$

問3　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

問4　式(1)の行列Aは実対称行列であり適当な直交行列Lによって，

$${}^{t}LAL = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と対角化することが可能である．ここで，λ_1，λ_2は行列Aの固有値で，${}^{t}L$は行列Lの転置行列である．行列Lを求めよ．

問題Ⅰ－3 （選択）

問1　複素関数 $\exp(z)$の実部を u 虚部を v として，複素数 z の実部を x 虚部を y とするとき

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ -\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

の関係（コーシー･リーマンの方程式）が成立することを示せ．

問2　$\sin(z_1)\sin(z_2)$ を $\cos(z_1+z_2)$, $\cos(z_1-z_2)$ で表せ．ここで z_1, z_2 は複素数である．

問3　$z^4+1=0$ となる全ての複素数 z を求めて式で示し，かつその位置を複素平面上に図示せよ．

問4　関数

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}$$

の特異点をすべて求め，さらに各々の特異点における留数を計算せよ．