Ｉ　数学

以下の２問（Ｉ－１，Ｉ－２）の両方に解答せよ．

Ｉ－１　次の問題１または問題２のどちらかを選んで解答せよ．

問題１（選択）　次の問１または問２のどちらかを選んで解答せよ．

問１

p が素数であるための必要十分条件は $(p-1)!+1$ が p で割切れることである；

$$(p-1)!+1=pn, \qquad n\in N_0 = N \cup \{0\}、$$

即ち、N_0は自然数の集合に０を加えた集合である．また，pnはある n と pを掛けたものである．この命題を証明せよ．

問２

実数は有理数と無理数からなる．

無理数全体の集合の濃度（即ち、個数）が非可算無限であることを示せ．

あるいは，少なくとも可算無限個あることを示せ．

後者に関しては，例えば平方数でない自然数の平方根は無理数であることを証明し，平方数でない自然数の濃度が自然数の濃度と等しいことを示せばよい．

問題２（選択）　次の問１と問２の両方に解答せよ．

問１

z_1，z_2を複素数とするとき，つぎの式は常に成り立つか．なぜそうなるか，その理由を述べよ．

(a)　$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

(b)　$\log z_1 z_2=\log z_1+\log z_2$

問２

次の文章を読んで，以下の問に答えよ．

「定理」：

複素関数 $f(z)$ の閉曲線Ｃの内部にある特異点での留数を A_1，A_2，…，A_mとし，外部にある特異点での留数を B_1，B_2，…，B_n，無限遠点における留数を Bとすると，

$$\sum_{k=1}^{m} A_k + \sum_{k=1}^{n} B_k + B = 0$$

が成り立つ.

(a) この定理を証明せよ.

(b) 無限遠点では，関数が正則であっても，そこでの留数が零になるとは限らない.

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

の無限遠点における留数を求めよ.

(c) 関数：

$$f(z) = \frac{z}{(2z+1)(z-2)}$$

について，留数を求め，上の定理が成り立つことを確かめよ.

I－2　次の問題3または問題4のどちらかを選んで解答せよ.

問題3（選択）　次の問に答えよ.

(a)

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\mathrm{x}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\mathrm{x}\right\}, \quad n = 1,2,3,\Lambda$$

は区間$[-\pi,\pi]$で正規直交系であることを示せ.

(b) $f(x) = x$ を区間$[-\pi,\pi]$でフーリエ級数展開せよ.

(c) 放物型2階偏微分方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

の解を

$$u(x,t) = F(x)\cdot G(t)$$

とおき，変数分離して，２つの常微分方程式を導け.

(d) (c)の放物型2階偏微分方程式を

境界条件：　$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

初期条件：　$u(x,0) = f(x)$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$

のもとで，区間$[0,\pi]$について解け．ただし，$f(x)$ は(b)で定義した関数とする.

問題４（選択）　次の文章を読んで，以下の問に答えよ．

空間の与えられた領域において，ベクトル $\mathbf{F}$ がベクトル微分演算子 ∇ とスカラー関数 ϕ を用いて

$$\mathbf{F} = -\nabla\phi \qquad (1)$$

と表されるとき，ϕ が一価の関数であれば，$\mathbf{F}$ は

$$\nabla\times\mathbf{F} = 0 \qquad (2)$$

および，領域内の任意の閉じた経路で積分して，

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (3)$$

を満足する．ただし，$d\mathbf{r}$ は線素ベクトルであり，積分路に沿った微小なベクトルである．これら３つの式は同等な式であり，１つの式から他の２つの式を導くことができる．

(a) ベクトル演算を行い，(1)式から(2)式を導け．ただし，ϕ は連続な関数であり，偏微分の順序が交換可能であるとする．

(b) (1)式から(3)式を導け．

(c) 領域内の任意の閉じた積分路に対して(3)式が成り立つとき，A と B を結ぶ積分の値が

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(A) - \phi(B)$$

のように積分の経路によらないで両端の点のみで決まり，一価のスカラー関数 ϕ が定義できることを示せ．この結果を用いて，(1)式を導け．