I　数学

以下の設問 (I-1, I-2) のすべてに答えなさい.

I－1 以下の各問題に答えよ.

問題 1　エルミート行列

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

について,

問 1 この行列の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする. $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ を求めよ.

問 2 最大固有値の値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

問題 2　関数 $f_n(x)$ $(n \geq 1)$ を次式で定義する.

$$f_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \cdot\cdot & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

ここで, 右辺の行列のサイズは $n \times n$ であるものとしている. このとき,

問 1 $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$ $(n \geq 3)$ の間に成り立つ漸化式を求めよ.

問 2 $f_5(x)$, $f_6(x)$ を求めよ.

I－2 以下の各問題に答えよ.

問題1　次の積分を実行しなさい.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{n-1}}{5z^n - 1}dz$$

ただし, z は複素数, n は正整数, C は 複素平面の原点 $z = 0$ を中心とする半径 1 の円を反時計回る積分路である.

問題2　複素平面 z で次のように定義された関数を Gamma 関数という:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\mathrm{Re}\{z\} > 0)$$

ただし, t は実数とする. 右辺の被積分関数は z の正則関数であり, Re $z > 0$ であるならば, 積分は一様収束する. したがって, $\Gamma(z)$ は Re $\{z\} > 0$ で正則である.

問 1 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ を導きなさい.

問 2 任意の正整数 n について, $\Gamma(z)$ と $\Gamma(z+n+1)$ の関係を導きなさい.

問 3 $\Gamma(1/2)$ を求めなさい. $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(5/2)$ はどのように表されるか.

ヒント: $\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right\}^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を極座標 (r, θ) に変換する.