I　数学

以下の５問（Ⅰ-1～Ⅰ-5）のうち、２問を選択して解答せよ．ヒントの番号を解答内で引用してはいけない．

Ⅰ－１（数と確率の基本概念）

実数直線上の区間 [0,1] をランダム一様に十分多数回切断したとする．区間 [0,1] に含まれる 1/3 より大きく1/2より小さい有理数の点が切断される確率は幾らか、数値を与え、その算出根拠を示せ．

Ⅰ－２（幾何学）

与えられた２点 F, G を焦点とする楕円上の任意の点を P とし、Pにおける楕円の接線 LPL' 及びこの点 P と各焦点を結ぶ２本の直線 PF, PG を考える．接線と直線PFのなす角FPLは接線と直線PGのなす角GPL'に等しいことを証明せよ．

ヒント：

(1) 接線に対し点Gの鏡映点G'を取り、直線FG'を引く．FG'と接線の交点をP'とせよ．P'が接点 P と一致しなければ矛盾が生じることを示せばよい．

(2) 楕円の任意の内点を x、外点を y とし、折れ線 FxG, FyGの長さを $d(x)$, $d(y)$とかく．同様に折れ線 FPGの長さを $d(P)$と書くと $d(x) < d(P) < d(y)$が成り立つ．

(3)接線上の接点 P 以外の全ての点は楕円の外点である．

Ⅰ－３（線形代数）

次の行列 $\mathbf{H}$ の固有値と固有ベクトルを問題１～問題５に従って求めよ．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題１　特性方程式を直接計算して $\mathbf{H}$ の固有値を求めよ．

問題２　$\mathbf{H}$ がエルミート行列かつユニタリー行列であることを示せ．このことから得られる固有値の間の関係を記せ．

問題３　$\mathbf{H}$ の跡（トレース）を求めよ．その値から決まる固有値間の関係を記せ．

問題４　問題２及び３で得られた関係を用いて $\mathbf{H}$ の４つの固有値を求めよ．

問題５　４つの固有値それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

Ｉ－4（微分方程式）

次の $y=y(x)$ に関する１階常微分方程式を問題１～問題３に従って解け．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\left(x^2+y^2\right)+x}{x\left(x^2+y^2\right)-y}$$

問題１　$x=r\cos s,\ y=r\sin s$ とおいて、$\partial r/\partial x,\ \partial r/\partial y,\ \partial s/\partial x,\ \partial s/\partial y$ を求めよ．

問題２　次の関係を用いて、与式を (r,s) についての微分方程式に変換せよ．

$$\frac{ds}{dr}=\frac{s_x+y's_y}{r_x+y'r_y},\qquad y'=\frac{dy}{dx},\ s_x=\frac{\partial s}{\partial x},\ r_y=\frac{\partial r}{\partial y},\ \text{etc.}$$

ヒント：与式の右辺を (r,s) で表し、上式右辺の因子 $y'=dy/dx$ に代入、更に問題１の結果を用いれば (r,s) で表された微分方程式を得る．

問題３　出来た微分方程式を解き、変数を戻すことにより与式の解を求めよ．

Ｉ－5（複素積分）

問題１～問題４に従って、次の積分関係を示せ．ただし $x=\theta$ の所では主値をとるものとする．

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{\cos x-\cos\theta}\,dx=\frac{\pi\sin n\theta}{\sin\theta},\qquad 0<\theta<\pi$$

問題１　$\exp(ix)=z$ とおいて変数を x から z に変換すると与式の被積分関数は

$$\mathrm{Re}\left[2\frac{z^n}{z+z^{-1}-z_0-z_0^{-1}}\right]$$

となることを示せ．ただし $z_0=\exp(i\theta)$ 、Re は実部を意味するものとする．

問題２　この分母を $f(z)$ とおく．z_0 と z_0^{-1} は $f(z)$ の１位の零点であることを示せ．
ヒント：例えば、$f(z)$ を z_0 及び z_0^{-1} でテーラー展開して $z-z_0$ の最低次数を求める．

問題３　$x\Rightarrow z$ の変換で積分路は複素平面上の半径１の上半円に移る．更に積分を下半円に延長すると、積分は単に元の２倍になることを与式の形から説明せよ．

問題４　原点を中心とした単位円を一周する経路で積分し z_0 と z_0^{-1} での留数を求めることにより与式の関係を導け．