IV　地球物理学

以下の４問（IV-１，IV-２，IV-３，IV-４）から２問を選択し解答しなさい．

IV-1　（選択）

緯度 φ の地球上の地点を考え，東向を x，北向を y，鉛直上向を z とする直交座標系 (x,y,z) を考え，その基底ベクトルを $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ とする．xy 面上の質点の水平運動を考える．水平速度 $\mathbf{v}=(u,v)$ が，ベクトル形式で次の運動方程式を満たすとする．

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}+f_0\mathbf{k}\times\mathbf{v}=\mathbf{0} \qquad (1)$$

ここで f_0 はコリオリパラメータ($f_0=2\Omega\sin\varphi$，Ω は地球の自転角速度)である．このとき次の問題に答えよ．

問題１ (1)の運動方程式の x 成分，y 成分をそれぞれ示せ．

問題２　初期条件を $\mathbf{v}_0=(u_0,v_0)$ とし，(1)を解いて $\mathbf{v}=(u,v)$ を求めよ．

問題３　問題２の解では常に運動エネルギーが保存されていることを示せ．

問題４ $u=\dfrac{dx}{dt}, v=\dfrac{dy}{dt}$ であることを考慮し，(1)を満たす運動をする流体粒子の軌跡が円運動を示すことを示せ．また，その半径と周期はどのように表せるか．

問題５　問題４の運動を何と呼ぶか．また，北極点と北緯 30 度での周期はそれぞれいくらか．

IV-2　(選択)

図１は粉々に砕いた石炭 (Coal)，地下核実験で破砕された花崗岩 (Granite)，そして高速度衝突で壊された玄武岩 (Basalt) の破片をいろいろな大きさのふるいにかけ，大きさごとの破片の頻度分布を積算でプロットしたものである．横軸は破片の大きさ（体積）の３分の１乗，つまり長さ r，を取ってある．いずれの積算頻度分布もべき分布

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (D \approx 2.5) \tag{1}$$

で近似されることがわかる．

これは図２にあるような破砕モデルで理論的に考えることができる．まず１辺の長さが h のさいころを１個考える．そのさいころを１辺の長さが $h/2$ の８個のさいころに分割する．８個のうちの右上手前の１個のさいころをさらに１辺の長さが $h/4$ の８個のさいころに分割する．この手順でさらに $h/8$, $h/16, \ldots$ と繰り返す．このとき以下の問題に答えなさい．

ただし，必要なら，$\ln 7 \approx 1.9, \ln 5 \approx 1.6, \ln 3 \approx 1.1$, $\ln 2 \approx 0.7, \sqrt{2} \approx 1.4$ を用いても良い．

問題１　$r = h/2^n \ (n > 0)$ まで分割したとき，積算数 $N(r)$ を求めよ．

問題２　上の $N(r)$ と r から $n \to \infty$ のとき，D を求めよ．ただし，分割が小さくなると (1) の積算数と図２で考えるそれぞれの長さでの個数はあまり違わないものとしてよい．

問題３　次の分割にすすむさいころが k 個（k は整数）のとき，$f = k/8$ の確率で次々に分割されるさいころが選択されることになる．$r = h/4$ まで分割がすすんだとき，辺の長さが $h/2$ と $h/4$ のさいころの個数を求めよ．

問題４　$r = h/2^n$ まで分割がすすんだとき，積算数 $N(r)$ を f を用いて表せ．

問題５　D が 2.5 に一番近くなる整数値 k を求めよ．

図１

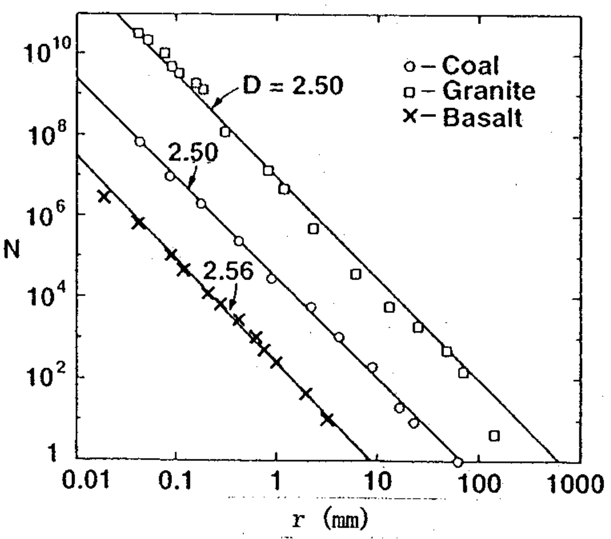
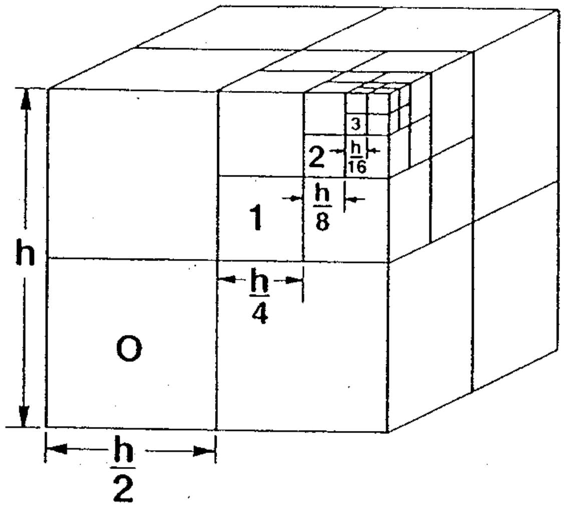


図２



IV-3　(選択)

フェルマの原理は，ある点P1(0,0)から出てほかの点P2$(a,h1+h2)$に達する光や地震波が，最少の所要時間になるような経路を取ることを示している．いま所要時間Tは媒質の速度をvとすれば，経路の長さdsについて，

$$T=\int_{P_1}^{P_2}\frac{ds}{v} \tag{1}$$

である．したがって，経路sはTが極値を取るので

$$\delta T=\delta\int_{P_1}^{P_2}\frac{ds}{v}=0 \tag{2}$$

で定まる．

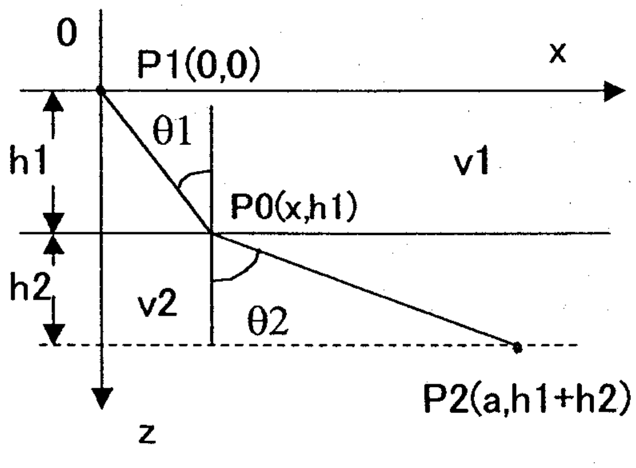
いま下図のようにP1，P2をとり，厚さがh_1で一定速度v_1をもつ媒質が一定速度v_2をもつ半無限媒質に接しているものとする．ただし，$0<v_1<v_2$である．以下の問題に答えなさい．

問題1　P0(x,h_1)を通りP1からP2へ伝わるのに要する時間TをP0の座標を用いて求めよ．

問題2　問題1の答えを用いて(2)となる関係式をP0のx座標を用いて導け．

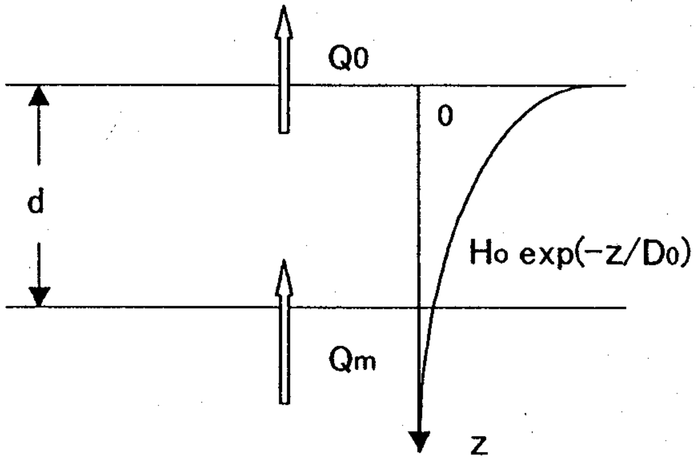
問題3　上の関係式を下図のθ_1とθ_2で表せ．ただし，$\sin\theta_1<v_1/v_2$とする．

問題4　ここではP1－P0－P2を通る波線を考えたが，この波線に直交する平面波の伝播を考えると，問題3の答えは幾何学的にどのような波動の伝播を示しているか答えよ．



IV-4　（選択）

次の問題文を読み，下図を参考にして$[A]$~$[F]$に適当な字句や数値，数式を書き入れなさい．



地球内部の単位体積当りの発熱量$H(z)$はおおよそ，

$$H(z) = H_0 \exp(-z/D_0) \tag{1}$$

で表される．ここで，H_0やD_0は定数であり，地表はz=0，zは下向が正である．熱が伝導でのみ伝わるとすれば，$z>0$にひろがる半無限媒質の地球を考えると温度 u は次の１次元の熱伝導方程式

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + H(z) \tag{2}$$

で与えられる．ここで，ρは密度，c_pは定圧比熱，uは温度，Kは熱伝導度，tは時間である．地球生成から十分時間がたっているから，温度分布は定常状態にあるとし，z方向にのみ変化するから，（２）式は

$$[A] \tag{3}$$

のように表される．

地表での熱流量を直接計測することができるから，地表での境界条件として，

$$z=0 \text{ で } K du/dz = Q_0 \tag{4}$$

とする．（１）と（４）を考慮して，（３）を一階積分すれば，

$$\frac{du}{dz} = [B] \tag{5}$$

となる．もう一度積分すれば，

$$u = u_0 + [C] \tag{6}$$

が得られる．ただし，$u_0 = u|_{z=0}$ である．

地殻とマントルが接している深さ $z = d$ では，マントルからの熱流量 Q_m があるから，地殻とマントルの熱伝導度が同じであるとすれば，それは，$[B]$ で $z = d$ として，

$$Q_m = [D] \tag{7}$$

と求まる．いま，$D_0 = 10$ｋｍ程度であり，地殻の厚さ $d >> D_0$ であるから，（７）式は

$$Q_m \cong [E] \tag{8}$$

と近似される．地表での発熱量を実際の計測から $H_0 \approx 2\mu W/m^2$ とすれば，観測される地表での熱流量がおおよそ $Q_0 \approx 40 mW/m^2$ であるから，マントルから流入する熱量はそのうち

$$[F] \ \% \tag{9}$$

を占めていることになる．