I　数学

以下の4問において, I-1とI-2は必答し, I-3とI-4はどちらか1問を選択し解答せよ. 導出の過程も示すこと.

I-1（必答）　常微分方程式に関する以下の問に答えよ.

問題1　次の2階常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\gamma\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 \qquad (0<t)$$

の一般解を, $\omega_0>\gamma$ と $\omega_0<\gamma$ のそれぞれの場合について求め, 初期条件 $u(0)=u_0,\ u_t(0)\equiv du/dt\big|_{t=0}=0$ に対する解を図示せよ. なお解が振動する場合には, その周期を明示すること.

問題2　上の微分方程式に, 任意の外力 $f(t)$ が与えられた場合,

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\gamma\frac{du}{dt}+\omega_0^2u=f(t) \qquad (0<t)$$

の解を求めよ. 初期条件は $u(0)=0, u_t(0)=0$ とする.

I-2（必答）　エルミート行列の対角化を，次の行列 **A** を例にして，以下の問に沿って答えよ．ただし，iは虚数単位である．

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{pmatrix}$$

問題1　行列 **A** の固有値を求めよ．

問題2　上で求めた固有値に対する固有ベクトルを求め，互いに直交していることを示せ．

問題3　正規化した固有ベクトルを列にして並べた行列を **U** として，これを書き下せ．また，問題２の結果から，$\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{U}=\mathbf{I}$となること，すなわち，$\tilde{\mathbf{U}}$が**U**の逆行列となるユニタリ行列であることを示せ．ただし，**I**は単位行列，$\tilde{U}_{ij}=U^{*}_{ji}$，*は複素共役である．

問題4　**U**の列に対応した固有値を対角成分にして，非対角成分はゼロとした行列を$\mathbf{\Lambda}$とすると，

$$\mathbf{AU}=\mathbf{U\Lambda}$$

となることを示せ．

問題5　以上の結果から，ユニタリ行列**U**を用いて，行列 **A** を対角化せよ．

I-3 (選択)　エルミート多項式$H_n(x)$は次のような母関数で定義されるとし，以下の問に答えよ．

$$F(x,t) \equiv \exp\left(-t^2+2xt\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x)}{k!}t^k$$

問題1　母関数をxで偏微分することで，次の$H_n(x)$についての漸化式を求めよ．

$$\frac{dH_n(x)}{dx}=2nH_{n-1}(x)$$

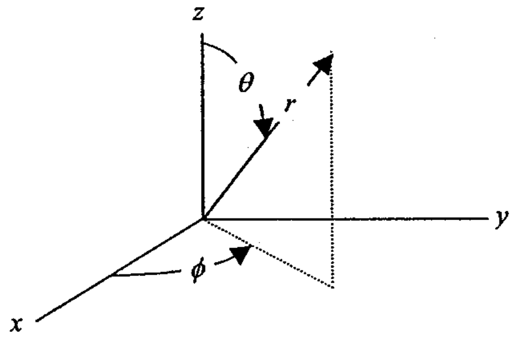
問題2　母関数をxやtで偏微分することで，$H_n(x)$が次の微分方程式の解となっていることを示せ．

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dH_n(x)}{dx}+2nH_n(x)=0$$

問題3　周積分の形で$H_n(x)$を示せ．（ヒント：まず任意の複素関数$f(z)$の原点のまわりのローラン展開$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n$で，$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$を示し，この結果を用いればよい．ただし，$C$は$z$=0のまわりを反時計回りに一周する積分路である．）

I-4 (選択) 以下の問いに答えよ.

問題1 スカラー関数uの勾配∇uを, 下図の3次元球座標(r,θ,ϕ)について導け. なおここで, 3次元球座標は, デカルト座標(x, y, z)に対して, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$で定義される.



問題2 関数uが原点からの距離にのみ依存し, 外力が原点でのデルタ関数である場合のポアソン方程式

$$\Delta u = \delta(x,y,z)$$

の解は,

$$u = -\frac{1}{4\pi r}$$

であることを証明せよ. ただしここで$\delta(x,y,z)$はディラックのデルタ関数である. 境界条件は, 無限遠で$u \to 0$とする. なお上図の3次元球座標でのラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

で与えられる.

問題3 問題2の方程式と解との関係を用い, ポアソン方程式

$$\Delta u = \delta(x,y,z-z_0) \quad (z>0)$$

の解を, 境界条件

$$u(x,y,0) = u_0$$

の下で求めよ. ただしu_0は定数, z_0は正の定数である. (ヒント:外力が与えられている点$z = z_0$から境界$z = 0$に対して対称な点$z = -z_0$からの仮想的な力源も加えたものを考える.)