IV　地球物理学

以下の４問（IV-1, IV-2, IV-3, IV-4）から２問を選択し，解答しなさい．

IV-1（選択）

北欧スカンジナビア半島の post-glacial rebound（氷河期の氷河の荷重で地面がへこみ，その後の地球温暖化によりその氷河が消滅し荷重がなくなることにより，地表のへこみが徐々に回復する現象）を，一様粘性流体モデルで考える．十分ゆっくりした運動なので慣性項を無視できる．また，水平一方向（y 方向）には氷河の荷重が一様と仮定し，鉛直上方向を z 軸として，(x,z) の２次元問題とする．このようにすると，以下のような Navier-Stokes 方程式と質量保存則を簡略化した式を用いればよい：

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=0,\qquad -\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w=0,\tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.\tag{2}$$

ただし，$\mathbf{v}=(u,w)$は流体の速度，p は圧力，そして μ は粘性率である．

質量保存則の式（２）は，次のような流れ関数$\psi\,(x,z)$を導入することで自動的に満たされる：

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w=\frac{\partial\psi}{\partial x}.\tag{3}$$

さらに，（３）を（１）の二つの式に代入すると，流れ関数 $\psi\,(x,z)$ は

$$\nabla^2\nabla^2\psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=0\tag{4}$$

を満たすことがわかる．

氷河の荷重の空間分布を，フーリエ級数の概念から波長 λの三角関数とみなして（波数 $k=2\pi/\lambda$），$\psi\,(x,z)$ を以下のように変数分離する：

$$\psi(x,z)=Z(z)\bullet\sin\frac{2\pi}{\lambda}x=Z(z)\bullet\sin kx.\tag{5}$$

これを（４）に代入すると，$Z(z)$は次のように求まる：

$$Z(z)=A\mathrm{e}^{kz}+B\mathrm{e}^{-kz}+Cz\mathrm{e}^{kz}+Dz\mathrm{e}^{-kz}.\tag{6}$$

ただし，A, B, C, D は未定常数である．

最後の図も参照して，次の問題を答えよ．

問題１　$z\to-\infty$ での物理的に妥当な境界条件より，（６）の４つの未定定数のうち，２つがゼロであることを示せ．

問題２　次に，地表面すなわち $z=0$ での境界条件を考える．線形の Newton 流体を仮定し，粘性流体の運動によって生ずる地表面での応力テンソルを考える．せん断応力成分はゼロとなるので，

$$\sigma_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=-\mu\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=0\quad \text{at } z=0 \qquad (7)$$

より，未定定数はひとつだけとなる．その時の流れ関数 $\psi(x,z)$ と速度の２成分 u, w を求めよ．さらに p を求めよ．（ヒント：（１）より $\partial p/\partial x$ をまず求め，それを積分する．この時に出てくる未定定数はゼロとおいてよい．）

問題３　地表面での圧縮成分 σ_{zz} は，地面の高さ $\zeta(t)$ 分の質量に重力加速度 g がかかる力とつりあうから，ρ を密度として，

$$\sigma_{zz}=-\rho g\zeta=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\qquad \text{at } z=0 \qquad (8)$$

が成立する．問題２で求めた p と w を用いて，（８）より ζ を求めよ．

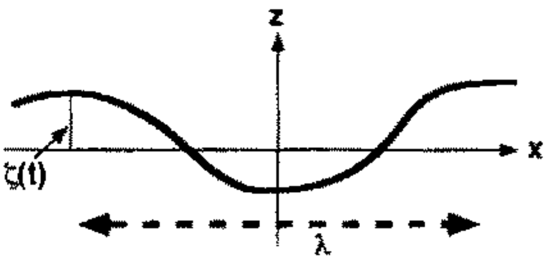
問題４　問題２で求めた w の $z=0$ での値と問題３で求めた ζ は比例することを確かめ，$\zeta=-\tau w$ となる定数 τ を求めよ．

問題５　地表面での粘性流体の鉛直方向の運動が地表面の高さ ζ の時間変化に対応するので，$z=0$ では $d\zeta/dt=w$ のように ζ は時間の関数とみなしてよい．問題４の結果と合わせて

$$\frac{d\zeta}{dt}=-\frac{1}{\tau}\zeta \qquad (9)$$

という $\zeta(t)$ についての微分方程式が求められるが，この解を求めよ．

問題６　スカンジナビア半島周辺の昔の氷河による変動の水平方向の広がりは約 3000 km で，約 4000 年（$=1.3\times10^{11}$ 秒）で氷河期の地表のへこみが半分くらいまで回復したことがわかっている．また，密度は $3300\mathrm{kg/m^3}$ で，重力加速度を $10\mathrm{m/s^2}$ とする．このような時間や空間についての大きさと問題５の結果から，この地域の粘性率 μ の大きさを具体的に推定せよ．



IV-2（選択）

惑星の内部構造をどのように推定していくか，次の問題に沿って考える．なお，ここでは密度や圧力などは，半径方向のみにしか変化しないものとする．

問題１　惑星内部の半径 r での重力加速度 $g(r)$ は，それより内側の質量 $m(r)$ がすべて中心の１点に集中した場合と全く同じ値になる．まず，$m(r)$を密度分布$\rho(r)$の積分形式で表せ．次に，この結果を用いて，$g(r)$を$\rho(r)$の積分形式で求めよ（重力定数を G とする）．また，この両辺を微分することで，$g(r)$についての$\rho(r)$を含む１階の常微分方程式を求めよ．

問題２　次に，圧力分布 $p(r)$を考える．地球などのほとんどの太陽系の惑星では，おおまかには圧力勾配が重力とつりあう「静水圧つりあいの式」

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\rho(r)g(r) \qquad (1)$$

が成り立つ．この物理的根拠を解答用紙に数行程度で説明せよ．

問題３　問題１で求めた微分方程式と（１）に加えて，構成物質の状態方程式，すなわち密度の圧力についての関係 $\rho(p)$ が求まれば，$\rho(r), p(r), g(r)$のすべてが求まり，内部構造が推定できることを簡単に説明せよ．しかし，このような状態方程式が，地球などの主要構成物質である固体（岩石）では，理想気体 $p/\rho =$ 一定，のように単純ではない．それは何故か，考えられる要因を３つまで挙げて簡単に説明せよ．

問題４　問題３で指摘した状態方程式の困難さを克服するための有効な手段として，地震波のＰ波とＳ波の速度分布

$$V_p(r) = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}, \quad V_s(r) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (2)$$

を測定することにより，内部構造が推定できる．ここで，κ, μ は体積弾性率とせん断弾性率である．体積弾性率 κ の逆数は，圧力による密度変化率であり，

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \qquad (3)$$

によって定義される．上の偏微分で一定であるもうひとつの熱力学的変数として，地震波の速度観測では，温度 T ではなく，エントロピー S である理由を簡単に説明せよ．

問題５　まず，$V_p(r), V_s(r)$を地震観測より求めることで，$\phi(r)=\kappa/\rho$ が求められ

ることを示せ．最後に、（１），（３）とこれをあわせることで，Adams-Williamson の式

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho g}{\phi} \qquad (4)$$

が成立することを示せ．

問題１の結果，（１），そして（４）を組み合わせることで，地震波速度の観測さえあれば，惑星内部構造 $\rho(r)$, $p(r)$, $g(r)$ はかなり正確に求められることが理解できる．

IV-3 （選択）

水平面における極座標 (r,θ)を用いた運動方程式は

$$\frac{dv_r}{dt}-\frac{v_\theta^2}{r}-fv_\theta=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (1)$$

$$\frac{dv_\theta}{dt}+\frac{v_\theta v_r}{r}+fv_r=-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}\ , \qquad (2)$$

ここで，v_r,v_θは速度の動径成分，接線成分であり，fはコリオリ・パラメータ，ρは流体の密度，pは圧力である．

問題１　等圧線が円形で，かつ等速運動を示す傾度風の式として，

$$v_r=0 \qquad (3)$$

$$\frac{v_\theta^2}{r}+fv_\theta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad (4)$$

のみが成立する事を示せ．

以下の問題には，式(4)を用いて答えよ．

問題２　式(4)はv_θに対して2次式であるので，二つの解が存在するが，一方のみが傾度風の解であることを示せ．

問題３　低気圧では理論上どんな強い風も吹くことができるが，高気圧では限界があることを示し，その最大風速を求めよ．

問題４　北半球での竜巻には左巻きのほかに，右巻きもあるという．それぞれの場合について，その中心が低気圧であるか，高気圧であるかとその理由を述べよ．

Ⅳ-4 （選択）

水分子が拡散によって周囲の水蒸気場から水滴表面へ移動して，水滴の質量が増加する凝結成長を考える．空間での水蒸気密度 ρ の分布が時間に関して一定の時，水滴の周囲での水蒸気密度分布は，$\nabla^2\rho=0$ で与えられる．

問題1　水滴（半径は r）表面での水蒸気密度が ρ_r，無限遠での水蒸気密度が ρ_∞（$\rho_\infty>\rho_r$ とする）の時，$\rho(R)$ の空間分布を水滴の中心からの距離 R を含む式で表わせ．

問題2　拡散（拡散係数 D）によって水滴表面へやってくる水蒸気フラックスの総量が，水滴の質量増加率 dm/dt になるので，水滴の成長速度 dm/dt を求めることができる．dm/dt を ρ_r，ρ_∞ と D を含む式で表わせ．

問題3　ρ_r は水滴表面の温度によって変化するので，次にその温度を求める．その温度 T_r を求めるためには，水蒸気が水滴表面で凝結したときに発生する凝結熱が周囲への伝導（熱伝導率 K）で消費することを表わす熱の釣り合いの式をたてれば良い．水滴表面の温度 T_r，無限遠での温度 T_∞ と熱伝導率 K を含むこの熱の釣り合いの式を求めよ．