I 数学

以下の 4 問 (**I-1, I-2, I-3, I-4**) から 3 問を選択し解答せよ．

I-1 (選択)

関数 $f(x)$ が有限の閉区間 $[a, b]$ において連続で，かつ開区間 (a, b) において微分可能であるとする．このとき $f(a) = f(b)$ であれば，$a < c < b$ を満たすある c に対し

$$f'(c) = 0,$$

が成り立つ．これをロルの定理という．ここで $f'(c) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=c}$ である．

問題 1 関数 $g(x)$ が有限の閉区間 $[a, b]$ において 1 階まで連続な導関数を持ち，開区間 (a, b) において 2 階微分可能であるとする．このとき，

$$G(x) = -g(b) + g(x) + g'(x)(b - x) + \left(\frac{b - x}{b - a}\right)^2 [g(b) - g(a) - g'(a)(b - a)]$$

と定義される関数 $G(x)$ とロルの定理を用いて，$a < c < b$ を満たすある c に対し

$$g(b) = g(a) + g'(a)(b - a) + \frac{g''(c)}{2}(b - a)^2$$

が成り立つことを示せ．

問題 2 関数 $h(x)$ が有限の閉区間 $[a, b]$ において n 階まで連続な導関数を持ち，開区間 (a, b) において $n + 1$ 階微分可能であるとする．このとき $a < c < b$ を満たすある c に対し

$$h(b) = h(a) + h'(a)(b-a) + \frac{h''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{h^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{h^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}$$

が成り立つことを示せ．ここで $h^{(n)}(a) = \left.\dfrac{d^n h}{dx^n}\right|_{x=a}$ 等を表す．

問題 3 以下の関数のマクローリン展開を求めよ．

問 1 $f(x) = \cos x$

問 2 $f(x) = e^x$

I-2 (選択)

n 次正方行列 A, A' に対し, n 次正則行列 Q が存在し,

$$A' = Q^{-1}AQ$$

であるとき A, A' は相似であるといい, この変換を相似変換とよぶ.

問題 1 A の特性方程式は相似変換に対し不変であることを示せ.

問題 2 A が n 個の線形独立な固有ベクトルを持つ場合, A は相似変換によって対角化可能となることを示せ.

問題 3 次の行列が対角化可能ならば対角化せよ. 不可能な場合はその理由を示せ.

問 1 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

問 2 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

I-3 (選択)

積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\,d\theta}{5+2\sin\theta},$$

について以下の問題に答えよ.

問題 1 $z=e^{i\theta}$ とおき, 上記の積分を $|z|=1$ の円 C を正の方向にたどる経路に沿った積分に変換せよ.

問題 2 円 C 内部に特異点があれば求め, それに対する留数を求めよ.

問題 3 上記の積分の値を求めよ.

I-4 (選択)

$0 \leq x \leq L$ において定義される関数 $u = u(x,t)$ に対する空間 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

について考える．ここで c は定数である．

問題 1 境界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,$$

を満たす自明でない解 $u(x,t)$ を，変数分離法を用いて求めよ．

問題 2 初期条件

$$u(x,0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x),$$

を満たす自明でない解 $u(x,t)$ を，以下の独立変数の変換

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

を用いて求めよ．