I. 数学

以下の 3 問 (I-1, I-2, I-3) 全てを解答せよ.

I-1

n 元連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c},$$

が自明でない解を持つ場合, 解の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 k 成分 x_k は, 行列式を用いて

$$x_k = \frac{\det \boldsymbol{D}_k}{\det \boldsymbol{A}}, \quad \boldsymbol{D}_k = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \cdots \boldsymbol{a}_n)$$

と表される. ここで $\boldsymbol{a}_k$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の第 k 列の要素から構成される n 次列ベクトルである. このとき以下の問題に答えよ.

問題 1　3 元 1 次連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \tag{I-1-1}$$

の解 x_1, x_2, x_3 は上の公式を用いると

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{D}_1}{\det \boldsymbol{D}}, \quad x_2 = \frac{\det \boldsymbol{D}_2}{\det \boldsymbol{D}}, \quad x_3 = \frac{\det \boldsymbol{D}_3}{\det \boldsymbol{D}} \tag{I-1-2}$$

と表される. ここで $\boldsymbol{D}$ は式 (I-1-1) の係数行列である. このとき行列 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_3$ を求めよ.

問題 2　式 (I-1-2) にしたがって, 式 (I-1-1) の解 x_1, x_2, x_3 を計算せよ.

I-2

複素平面上で定義された関数 $f(z)$ について考える. h を偏角一定の複素数とし, 複素平面上の各点 z において極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{I-2-3}$$

が h の取り方によらず一意に定まる時, $f(z)$ は微分可能と言う. このとき以下の問題に答えよ.

問題 1　$f(z) = z^2$ とする. このとき $h = r$ として式 (I-2-3) の極限を計算せよ. ここで r は実数とする.

問題 2　$f(z) = z^n$ とする. このとき $h = re^{i\theta}$ として式 (I-2-3) の極限を計算し, $f(z) = z^n$ は微分可能であることを示せ. ここで r, θ は実数, i は虚数単位である.

I-3

y は x の関数 ($y = y(x)$) とし, その一階導関数を y', 二階導関数を y'' と表す. このとき以下の問題に答えよ.

問題 1　微分方程式

$$x^2 y'' + axy' + by = F(x)$$

において, $x = e^t$ として独立変数を x から t に変換すると, この微分方程式は定数係数線形微分方程式になることを示せ. ここで, a, b は定数, $F(x)$ は x の関数である.

問題 2　問題 1 で用いた変数変換を利用して, 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$