II 物理学

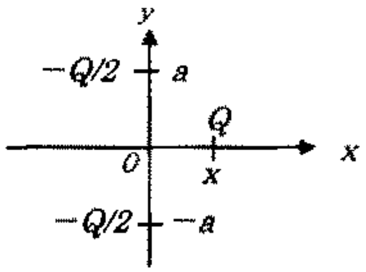
以下の 4 問(II-1, II-2, II-3, II-4)のうち，任意の2問を選んで解答せよ．

II-1 (選択)

問題1 以下の問に答えよ．

問1 y 軸上の 2 点($-a$, $+a$)に $-Q/2$ の点電荷がそれぞれ固定されている．このとき x 軸上の $x=0$ 以外の点(x)にある点電荷 Q に働く力を求めよ．

問2 問1において点電荷 Q が x 軸上を自由に動くことができるとき点電荷 Q は単振動する．運動方程式を導き，このときの角振動数を求めよ．ただし，点電荷 Q の質量を m とし，$|x| \ll a$ とする．



問題2 図は質量分析器の原理図である．

以下の問に答えよ．その際，磁場は長さ l の範囲のみにあるとする．

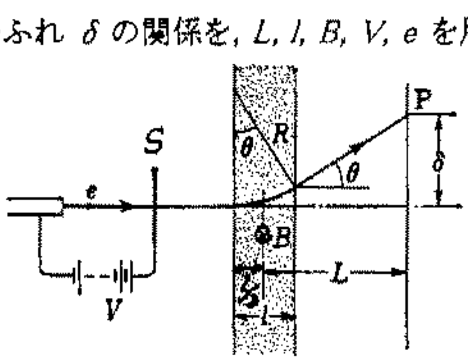
問1 陰極から初速度なしで出た質量 m，電荷 e のイオンは加速電圧 V で加速される．スリット S を通過した際，イオンの持つ速度 v_0 はいかほどか．

問2 速度 v_0 で飛び出したイオンは紙面に垂直方向の均質な磁場(強さ B)で偏向される．偏向したイオンは遠心力をうけ，磁力と釣り合い，紙面内で円弧(半径 R)を描く．釣り合いの式から R を求めよ．

問3 磁場の範囲から飛び出したイオンは直進し，検出器 P に入り検知される．偏向角 θ が極めて小さいとすると，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ であり，

$\delta = (L-l/2)\tan\theta + R(1-\cos\theta) \fallingdotseq (L-l/2)\,\theta + (R/2)\,\theta^2$ となる．

質量 m とイオンのふれ δ の関係を，L, l, B, V, e を用いて表せ．



II-2（選択）

質量がm_1とm_2の2つの球が相対速度$\vec{v}$で衝突することを考える．2つの球の半径は同じで表面は非常になめらかで摩擦は働かないとする．また2つの球の回転は考えない．

衝突後の相対速度$\vec{v}'$の中心線方向$\vec{r}/r$の成分が

$$\vec{v}'\cdot\vec{e}_r = -k\vec{v}\cdot\vec{e}_r, \qquad 0 \le k \le 1$$

に従って変化した時，衝突前後の運動エネルギーの変化を下記の問題に従って導きだす．ここで$\vec{e}_r$は中心線の方向の単位ベクトルであり，またkは反発係数である．

問題1　2つの球の衝突前の速度をそれぞれ$\vec{v}_1, \vec{v}_2$とし，衝突後の速度を$\vec{v}'_1, \vec{v}'_2$とすると$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$，$\vec{v}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$と表せる．運動量保存則の式を$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$で書け．

問題2　衝突前と衝突後の運動エネルギーの変化ΔEを$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$で表せ．

問題3　なめらかな2球が接触する場合，中心線と垂直な方向には力が作用しない事から，相対速度の変化は中心線方向の成分しか存在しないので，$\vec{v} - \vec{v}' = \alpha\vec{e}_r$と書ける．運動量保存則の式を用いて下記の式を導き出せ．

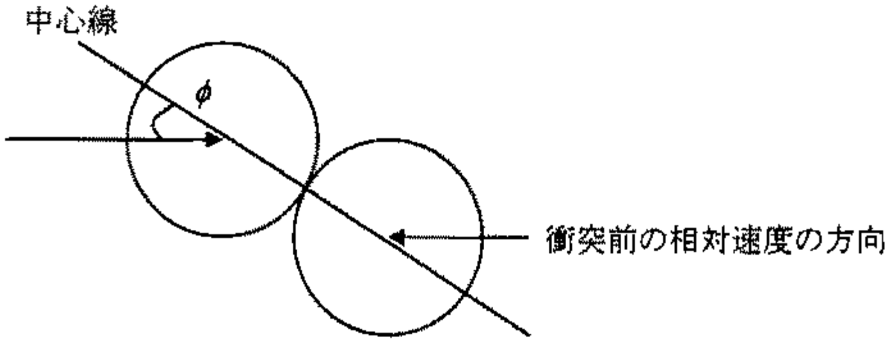
$$\vec{v}_1 - \vec{v}'_1 = \alpha\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{e}_r \qquad \vec{v}_2 - \vec{v}'_2 = -\alpha\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{e}_r$$

問題4　αは$\alpha = (1+k)\vec{e}_r\cdot\vec{v}$と表せる事を示せ．

問題5　これらの式を用いて，運動エネルギー変化量ΔEが下記になる事を示せ．

$$\Delta E = \frac{(1-k^2)m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}|\vec{v}|^2\cos^2\phi$$

ここでϕは衝突前の相対速度の方向と中心線のなす角である．



II-3（選択）

スピン 1/2 の粒子が温度 T, 磁場 H の中に置かれると, Zeeman 効果のため, そのエネルギー準位は, $-\mu H$, μH の 2 つに分かれる. ただし, μ は磁気モーメントである. 系がこのような 1 粒子だけからなる場合, その分配関数(状態和) Z_1 は

$$Z_1 = e^{-\beta\mu H} + e^{\beta\mu H}$$

である. この分配関数はエネルギー準位が上のようになる確率密度と考えてよい. ただし, $\beta = 1/kT$, k は Boltzman 定数である.

問題 1　それぞれ勝手な ±1/2 のスピンを持つ独立な N 個の粒子からなる系が, 磁場 H の中, 温度 T で平衡状態にあるとき, その分配関数 Z_N を示せ. ただし, 系は結晶であり, 各粒子は空間に固定されているものとして考える.

問題 2　この系の Helmholtz の自由エネルギー $F(=-kT\ln Z_N)$ を書き下せ.

問題 3　分配関数で表わしたエントロピーの定義から, $S=-\partial F/\partial T$ となることを示せ. さらにエントロピーを温度 T の関数で表せ.

問題 4　上の問題2と3の結果を用いて内部エネルギー $U(=F+TS)$ を表せ.

問題 5　磁気モーメントは外部磁場をかけたとき F が減少する割合として定義される. 問題2の結果を用いて磁気モーメント M を求めよ.

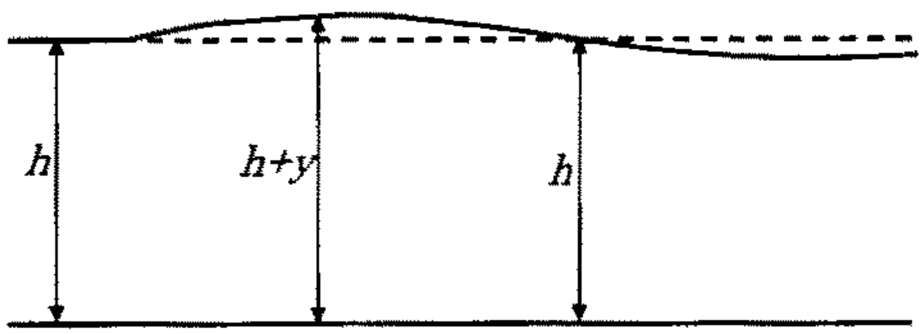
II-4 （選択）

水深がhで，一様な水の表面を伝わる波を考える．ここで水は非圧縮な完全流体とする．波の波長に比べて水の深さが十分浅く，波の振幅は水の深さに比べて十分小さいとする．この波を波の速さvで動く座標系で見ると水が反対方向に動く定常流に見え，この座標系に対して連続の式とベルヌーイの定理（流線に沿って流れる粒子のエネルギー保存則）が成り立つ．その時の波の速度を下記の問題に従って導き出す．

問題1　水面の高さが h の時の流速をv，高さが $h+y\ (y \ll h)$の時の流速をv'とする．連続の式から導かれる関係を式で示せ．

問題2　水面の高さが h の時と $h+y$ の時に対してベルヌーイの定理から導かれる関係を式で示せ．ここで重力加速度をg，水の密度をρとする．

問題3　上記の2式と$y \ll h$ の条件を用いて流速vをgとhで表せ．



断面図（ただし水平方向に比べ鉛直方向に誇張している．波の波長は水深hよりも十分に長いと考えよ．）