# I　数学

以下の３問 (I–1，I–2，I–3) 全てに解答せよ．解答にあたっては結果だけでなく，導出過程も記せ．

## I–1　以下の問題に答えよ．

問題１　行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の階数 (rank) が 2 であるとき $a$ を求めよ．

問題２　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y$ の解を求めよ．ただし $x = 0$ のとき $y = 1,\, y' = 0$ とする．

問題３　$x$ の関数 $\dfrac{1}{1-x^2}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開したときの $x^{10}$ の係数を求めよ．

問題４　$|z-1| \leq 1$ かつ $0 \leq \arg z^2 < \pi/6$ を満たす複素数 $z$ の占める領域を複素平面上に図示せよ．

問題５　調和級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ は $n \to \infty$ で無限大に発散する．このことを用いて $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$ の $n \to \infty$ における極限値を求めよ．

問題６　３次元直交座標系の $z$ 方向の基本単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ とし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．このとき $\mathrm{rot}\, \dfrac{\boldsymbol{k}}{r}$ の各成分を求めよ．(注：演算子 rot は curl や $\nabla\times$ と表されることもある．)

I–2　以下の問題に答えよ．

問題 1　複素数 $z_1$ で表される複素平面上の点が原点を中心とする半径 2 の円を反時計回りに一周する．このとき $w = \dfrac{1}{z_1}$ で表される複素数 $w$ は，複素平面上にどのような軌跡を描くか，その方向も分かるように図示せよ．

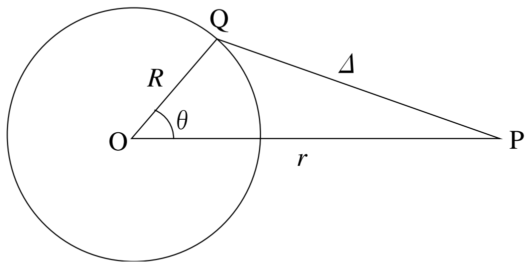
問題 2　問題 1 の $w$ の軌跡に沿った次の複素積分の値を求めよ．

$$\int \frac{1}{z(z-a)} dz$$

ここで $a$ は複素定数であり，$a$ の値によって結果が異なることに注意せよ．

I–3　以下の問題に答えよ．

問題 1　半径 $R$ の球があり，球の外に点 P がある．球の中心を O とし，P と O の距離を $r$ とする．∠POQ を $\theta$，球の表面にある点 Q と点 P の距離 PQ を $\Delta$ として，$\Delta$ を $R$，$r$，$\theta$ を用いて表せ．




問題 2　上で得られた $\Delta$ の逆数 $1/\Delta$ を $R/r$ のべき級数で展開し

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{R}{r}\right) P_1(\cos\theta) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \left(\frac{R}{r}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \cdots\right)$$

の形で表すとき，$P_n(\cos\theta)$ を $n = 1$ から $n = 3$ まで求めよ．

問題 3　全ての $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $P_n(1)$ および $P_n(-1)$ を求めよ．