

I 数学

以下の3問(I-1, I-2, I-3)全てに解答せよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程も記せ。

I-1 以下の問題に答えよ。

問題1 任意のスカラー場 $\phi(x, y, z)$ があつたとき、その勾配の回転はゼロになる ($\nabla \times \nabla \phi = 0$) ことを示せ。

問題2 任意のベクトル場 $\mathbf{h}(x, y, z)$ があつたとき、その回転の発散がゼロになる ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$) ことを示せ。

問題3 下記の方程式を満たす $\phi(t, x)$ の解を求めよ。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

ただし $\phi(0, x) = \sin x$, $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ とする。

問題4 下記の積分を実行せよ。ただし r は正の実数である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + r^2})^3}$$

問題5 x と y はそれぞれ時間 t の関数であり、次の連立微分方程式を満たす。 x および y の一般解を求めよ。また初期条件として $t = 0$ で $(x, y) = (a, 0)$ としたときの特殊解を求め、それについて t の変化によって点 (x, y) が描く軌跡を描け。

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= -x \end{aligned}$$

問題6 次式の値を求めよ。

$$\sin \frac{1}{15} \pi + \sin \frac{11}{15} \pi + \sin \frac{7}{5} \pi$$

I-2 次の行列 A について以下の問題に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{3}i \\ -\frac{\pi}{3}i & 0 \end{pmatrix}$$

ここで i は虚数単位を表す.

問題1 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

問題2 A を対角化せよ.

問題3 A の指数関数を次のように定義する.

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

ここで I は 2×2 の単位行列である. e^A を計算せよ.

I-3 $\log_e 3$ の近似値を小数点以下第2位まで求めよ. ここで e は自然対数の底 $e = 2.71828\dots$ を表す.