Ⅱ　物理学

以下の４問（II-1, II-2, II-3, II-4）のうち３問を解答せよ．ただし，II-1 と II-2 には必ず解答し，II-3 と II-4 からいずれか１問を選択して解答せよ．

Ⅱ－１（必須）

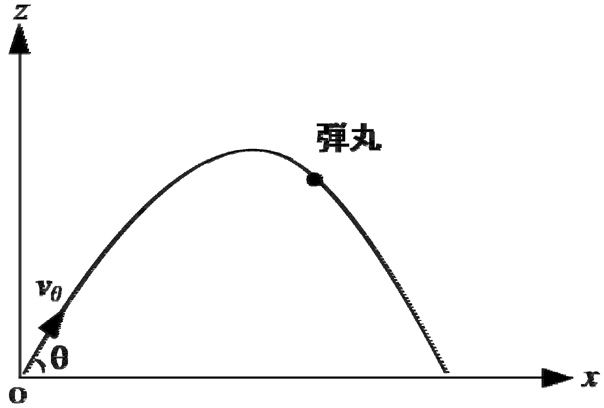
図のように，時刻 t=0 において原点から角度 θ で弾丸を発射する．初速度を v_0，弾丸の質量を m，重力加速度を g（一定）とする．z 軸を鉛直上向きにとり，x 軸を弾丸の進む水平方向にとる．このとき，以下の問題に答えよ．

問題１　空気抵抗を無視したとき，x 方向および z 方向についてそれぞれ弾丸の運動方程式を書け．ただし, v_x と v_z をそれぞれ x 方向, z 方向の速度成分とする．

問題２　初期条件を考慮して，問題１で求めた運動方程式を解き，弾丸の位置を時間の関数として求めよ．

問題３　原点から弾丸の落下地点までの水平距離を求めよ．その結果から，到達距離を最大にするには射出角を何度にすればよいかを答えよ．

問題４　速度 v に比例する空気抵抗を考慮した場合の弾道は時間の関数としてどのように表されるか．



Ⅱ－２（必須）

電荷 q, 質量 m の粒子が, 電場 $\vec{E}$ および磁場 $\vec{B}$ が存在する場において運動している. $\vec{v}$ を粒子の速度とすると，その運動方程式は以下のように表される.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}]$$

問題１　電場 $\vec{E}=0$ かつ，定常一様な磁場 $\vec{B}$ を考える．粒子の運動を磁場に垂直な面に投影すると，それは円運動となることが知られている．このときの円運動の半径 r_L を求めよ.

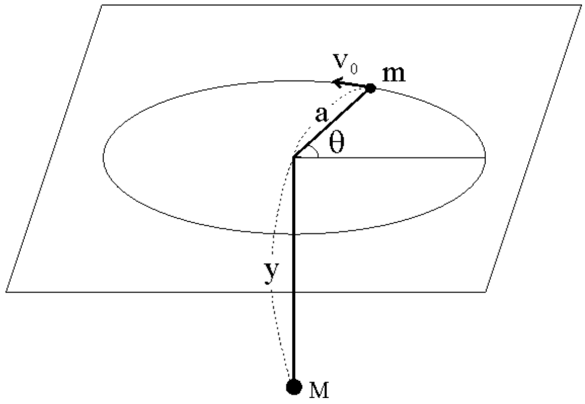
問題２　問題１における円運動の角周波数 Ω を求めよ.

問題３　定常一様な磁場 $\vec{B}$ に直交する定常一様な電場 $\vec{E}$ が存在する場合を考える．このとき，粒子の運動は，$\vec{B}$ および $\vec{E}$ に直交する方向への，一定速度

$$\vec{u}_D=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$$

の並進運動と，問題１の円運動の合成運動となることを示せ.

II－3（選択）



右図のように，水平な板に小穴をあけ長さ l の糸を通し，その上端に質量 m のおもりを結び，下端には質量 M のおもりを結んでつるす．板上の糸の長さが a である時に，おもり m に対して糸に直角に水平初速度 v_0 を与えた場合の運動を板や糸の摩擦を無視して議論する．下の文章を読んで問題に答えよ．

板上のおもり m の位置を，小穴を原点とする極座標(r, θ)で表し(r: 半径方向，θ: 接線方向)，糸の張力を T とすると，おもり m の半径方向の運動方程式は,

$$\boxed{\quad (1) \quad} \qquad ①$$

で与えられる．また，接線方向についてはおもりの角運動量が保存するので,

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \qquad ②$$

である（ドットは時間微分を表す）．$t = 0$で，$r = a$での接線方向の速度が v_0 でであるという初期条件と②式から角速度を求めると,

$$\dot{\theta} = \boxed{\quad (2) \quad} \qquad ③$$

となる．小穴からおもり M までの糸の長さを y とすると,

$$y + r = l \qquad ④$$

である．

（次頁につづく）

おもりMの運動方程式は，重力加速度をgとして，

$$\boxed{\quad (3) \quad} \qquad ⑤$$

のように書ける．

①，③，④，⑤からθ，y，Tを消去すると次式となる．

$$\boxed{\quad (4) \quad}$$

この式は，さらに次のように時間に関しての全微分型へと変形できる．

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad (5) \quad}\right) = 0 \qquad ⑥$$

$t = 0$で$r = a$，$\dot{r} = 0$の条件を使って⑥式を積分すると，

$$\left(\dot{r}\right)^2 = -\frac{2Mg}{(M-m)r^2}(r-a)(r-b)(r+c) \qquad ⑦$$

となる．ここで，

$$b = \boxed{\quad (6) \quad}$$

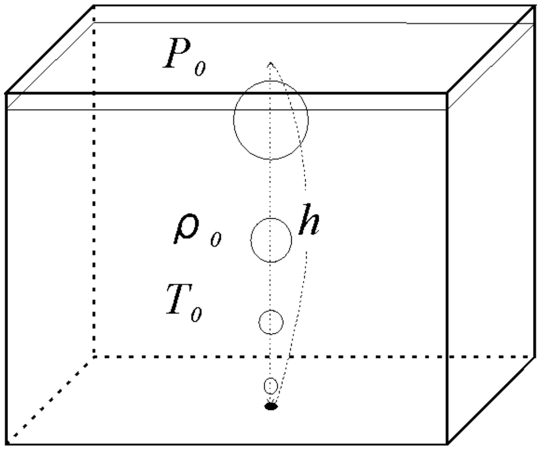
$$c = \boxed{\quad (7) \quad}$$

である（ただし，$b > 0$，$c > 0$とする）．

問題１　$\boxed{\quad (1) \quad}$から$\boxed{\quad (7) \quad}$に適切な数式を入れよ．

問題２　⑦式をもとに，板上のおもり m の運動を論じよ（必要に応じグラフや図を使って説明せよ）．ただし，糸は十分に長く，板は十分に大きいものとする．

II－4（選択）



右図のように一様な密度ρ_0，一定な温度T_0，深さhの非圧縮性液体で満たされたプールを考える．初期温度T_0で単位モルの理想気体の気泡が底面から液体表面まで上昇する場合を考えよう．大気圧をP_0，重力加速度をgとして次の問題に答えよ．

問題１　プール底面での圧力と気泡の体積を求めよ．ただし，気体定数をRとする．

問題２　気泡を充分にゆっくり上昇させて，気泡がプールの液体温度T_0で等温変化する場合を考える．気泡がプール底面から液体表面にまで達する間に液体になした仕事量を求めよ．また，気泡が等温変化するために液体から受け取った熱量はいくらか．

問題３　問題２とは異なり，気泡を充分に速く上昇させて断熱変化で液体表面にまで到達する場合を考える．この時，気泡気体の圧力をp，体積をV，比熱比をγ（$\gamma = c_p/c_v$，c_pは定圧モル比熱，c_vは定積モル比熱）とすると，断熱変化では$p \cdot V^{\gamma}$が一定に保たれることを熱力学第一法則より導け．

問題４　問題３でプール底面から温度T_0で放出された気泡が液体表面にまで達する間に液体になした仕事量を求めよ．また，気泡の温度は液体表面に達した時，何度下がるか．