

I 数学

以下の3問 (I - 1, I - 2, I - 3) 全てに解答せよ. 解答にあたっては結果だけでなく導出過程も記せ.

I - 1 以下の問題に答えよ.

問題1 次の複素関数の特異点をすべて求め, そこでの留数を求めよ.

$$\frac{1}{2z^2 - 5iz - 2}$$

問題2 次の積分を実行せよ. ただし, 積分経路は $|z| = 1$ の円周上を正の向き (反時計回り) にたどるものとする.

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5iz - 2}$$

問題3 次の積分を実行せよ. θ を適当に変数変換し, 問題2と同様の経路をたどる積分に変形するとよい.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta}$$

I - 2 次の行列に関して以下の問題に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

問題1 行列 A の固有値を求めよ.

問題2 正規直交固有ベクトルを求めよ.

問題3 前問の正規直交固有ベクトルを列として並べた行列を U とする. この行列 U を用いて, 行列 A を対角化せよ.

問題4 A^n を求めよ. ただし, n は正の整数とする.

I - 3 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上で定義された関数 $f(x)$ を次式のようなフーリエ級数に展開することを考える.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

問題 1 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において, 関数系 $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は直交関数系をなすことを用いて, 係数 a_0, a_n, b_n (フーリエ係数) を表す積分表現を求めよ.

問題 2 次の関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

問題 3 問題 2 の結果を用いて次の関係式を示せ.

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$