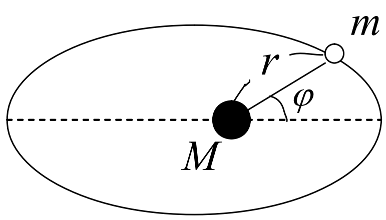
II 物理学

以下の４問（II－１，II－２，II－３，II－４）のうち３問を解答せよ．ただし，II－１ と II－２ は必ず解答し，II－３ と II－４ のいずれか 1 問を選択して解答せよ．

II－１（必須）

太陽のまわりを周回する惑星の運動を考える．惑星の質量を m，太陽の質量を M，万有引力定数を G とする．この運動は２次元の平面運動で, 太陽の質量は惑星にくらべ十分大きいため，太陽は惑星に対し静止していると考える．このとき以下の問いに答えよ．



問題１　太陽からの惑星までの距離を r，近日点から図った方位角を φ とする．$x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$ とおいて，系のラグランジアン $L = T - U$ を r，φ を用いて表せ．ここで T は運動エネルギー，U は重力ポテンシャルエネルギーである．

問題２　ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

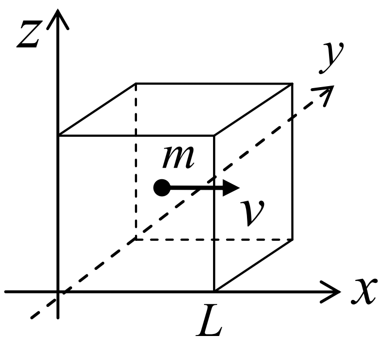
と表される．ここで q は一般化座標，$\dot{q}$ はその時間微分である．この式と問題１で求めたラグランジアンを用いて r 方向と φ 方向の運動方程式を求めよ．

問題３　面積速度は時間によらず一定となることを示せ．

問題４　惑星の軌道が円軌道$(r = a)$の場合を考える．このとき公転周期と軌道半径との間に成り立つ関係式を求めよ．

II－２（必須）

一辺の長さ L の立方体容器内の気体が壁に及ぼす圧力を，気体分子の運動に基づき以下のように考察した．文章を読んで問題に答えよ．



気体分子の質量を m，容器内に含まれる気体分子の数を N とする．ここでは気体は十分に希薄であるとして，気体分子同士の衝突は無視できるとする．気体分子と壁との衝突は弾性的であるとする．上図の $x=L$ における x 軸に垂直な壁に x 方向に速度 v で進む気体分子が衝突し，反対方向に跳ね返されたとする．このときの気体分子一つの運動量変化は，

[(1)]

と表される．気体分子の速度はすべて等しく v であるとし，さらに x 方向，y 方向，z 方向に運動する分子の数はそれぞれ $N/3$ 個であるとする．

$x=L$

における x 軸に垂直な壁に衝突した気体分子が再び同じ壁に衝突するまでにかかる時間は，

[(2)]

である．このことから，$x=L$ における x 軸に垂直な壁に単位時間あたり衝突する気体分子の数は，

[(3)]

と見積もることができる.

　壁に与えられる単位時間あたりの力積は［　(1)　］×［　(3)　］であるから，壁での圧力 p は，

$$p = [\quad (4) \quad]$$

と表せる.

問題１［　(1)　］～［　(4)　］の空欄に適切な式を入れよ.

問題２　式 $p =$［　(4)　］と理想気体の状態方程式から，気体分子の速度 v は気体の温度 T を用いてどのように表されるか.

II－３（選択）

微分形の真空中のマクスウェルの方程式は

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

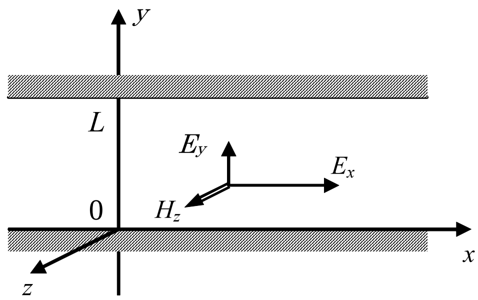
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

で与えられる．$\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{H}$ は磁場である．真空中の誘電率を ε_0，真空中の透磁率を μ_0 とすると，

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\,,\quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

と表せる．

右図のように，$y = 0$ と L に位置する 2 枚の広い導体板に挟まれた真空中を，電磁場が x 方向に伝播するとする．すべての場の量は z 座標には依存しないとして，以下の問題に答えよ．



問題１　マクスウェルの方程式から H_z だけを含む方程式を以下のように導く．［　(5)　］～［　(8)　］の空欄に適切な式を入れよ．

まず，式 (3) の z 成分の式から，

［　(5)　］

が求められる．次に，式 (4) の x 成分の式から

［　(6)　］，

式 (4) の y 成分の式から

［　(7)　］

が求められる．式（5）と式（6），（7）を組み合わせると，H_z だけを含む方程式

［　（8）　］

が求められる．

問題２　問題１の式（8）の解として，

$$H_z = H_0 \cos(ly) \sin(kx - \omega t) \qquad (9)$$

を仮定し，ω，l，k の間に成り立つ関係式を求めよ．

問題３　H_z が式（9）で与えられる場合，導体上では $E_x = 0$ であることを用いて，l の満たすべき条件を求めよ．

II－４（選択）

クーロン力により電子が原子核のまわりを速さ v で円運動する水素原子の模型を考える．電子軌道の半径を r，電子の質量を m，電子と原子核の電荷をそれぞれ $-e$ と $+e$，真空の誘電率をε_0とする．以下の問題に答えよ．

問題１　電子の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和(全エネルギー) E を求めよ．

問題２　加速度運動をする電子は電磁波を放射することで単位時間あたり

$$\frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}|\dot{v}|^2 \tag{1}$$

のエネルギーを失う．ここで $|\dot{v}|$ は電子の加速度の大きさ，c は光速である．この水素原子の模型の場合，式（1）は

$$-\frac{2}{3}\frac{e^6}{(4\pi\varepsilon_0 c)^3 m^2 r^4} \tag{2}$$

と表されることを示せ．

問題３　問題１で得られた Eの時間変化が式（2）で与えられることを用いて，電子の軌道半径 r の時間変化を表す式を求めよ．さらにその式を用いて，初めに $r=a$ に存在した電子が原子核に落ち込むまで($r=0$ になるまで)の時間 τ を求めよ．