第1章　数の表現と誤差

1　開区間・閉区間の表記法

(a, b) のような表記のとき、開区間と呼び範囲の両端 a,b は区間に含まれない。

$[a, b]$ のような表記のとき、閉区間と呼び範囲の両端 a,b は区間に含まれる。

$(a, b]$ のような表記のとき、左開右閉あるいは右閉左開区間と呼び a は区間に含まれないが,b は区間に含まれる。

$[a, b)$ のような表記のとき、左閉右開あるいは右開左閉区間と呼び a は区間に含まれるが,b は区間に含まれない。

2　関数の誤差範囲とパラメータの誤差範囲の関係

実数 x 及び y の測定値をそれぞれ a,b とし, その誤差の範囲を Δa,Δb で表したとすると,

$$\begin{aligned} x &= a \pm \Delta a \\ y &= b \pm \Delta b \end{aligned} \tag{2.1}$$

と書くことができる. ただし $0 < \Delta a, 0 < \Delta b$ である.

ここで x と y の関数としてあらわされる量 $z = f(x, y) = f(\boldsymbol{x})$ を考える. この z は $z = f(\boldsymbol{x}) = c \pm \Delta c$ の形で書くことができ,c と Δc はそれぞれ以下のように記述できる.

$$c = f(a, b) = f(\boldsymbol{a}) \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
\text{誤差の絶対値} &= |f(\boldsymbol{a} \pm \Delta a) - f(\boldsymbol{a})| \\
&= \left| \left(f(\boldsymbol{a}) \pm \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{a} + \cdots \right) - f(\boldsymbol{a}) \right| \\
&= \left| \pm \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{a} \pm \cdots \right| \\
&\simeq \left| \pm \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{a} \right| \\
&= \left| \pm \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \Delta a \pm \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \Delta b \right| \\
&\leq \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \right| \Delta b \\
&\equiv \Delta c
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

ただし $0 < \Delta c$ である．Δc には以下のような性質がある。

$z = f(x,y) = x \pm y$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\Delta c &= \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(\Delta a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(\Delta b) \\
&= \Delta a + \Delta b
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

となり,z の絶対誤差 Δc はパラメータ x, y の絶対誤差 $\Delta x, \Delta y$ の和となる.

$z = f(x,y) = xy$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\Delta c &= \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(\Delta a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(\Delta b) \\
&= b(\Delta a) + a(\Delta b) \\
\frac{\Delta c}{c} &= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

となり,z の相対誤差 $\frac{\Delta c}{c}$ はパラメータ x, y の相対誤差 $\frac{\Delta a}{a}, \frac{\Delta b}{b}$ の和となる.

3 精度による問題の例

(i) gfd1.f90 は、$n^2, n^3, 1/n$ について、n が 1〜10 の場合を出力するプログラムとなっている。

(ii) gfd2.f90 は、0.01 を一万回足すプログラムである。単精度と倍精度の場合で結果の正確さが異なっている。