

多項式の計算に注意しよう

桁落ちは特殊な現象ではなく、方程式を数値的に解くときなどに起こりやすい。たとえば前述でも出てきた方程式

$$2.718282x^2 - 684.4566x + 0.3161592 = 0 \quad (3)$$

において $x = 251.7980^{1)}$ として、(3) の左辺にホーナー (Horner) 法²⁾を用いて式を変形し代入すると、

$$\begin{aligned} & (2.718282 \times 251.7980 - 684.4566) \times 251.7980 + 0.3161592 \\ &= ((684.4580 - 684.4566)) \times 251.7980 + 0.3161592 \\ &= 0.0014 \times 251.7980 + 0.3161592 \\ &= 0.3525172 + 0.3161592 = 0.6686764 \end{aligned}$$

このように $((684.4580 - 684.4566))$ の計算で激しい桁落ちが生じ、結果として有効数字 2 桁の数字となる。10 進 7 桁計算をしているので、最終結果に含まれる誤差は $\delta = 0.26$ となる。³⁾

一方、 $x = 0.0004619157$ として、(3) の左辺に上記と同様にホーナー法を用いた計算をすると、

$$\begin{aligned} & (2.718282 \times 0.0004619157 - 684.4566) \times 0.0004619157 + 0.3161592 \\ &= (0.001255617 - 684.4566) \times 0.0004619157 + 0.3161592 \\ &= -684.4553 \times 0.0004619157 + 0.3161592 \\ &= -0.3161606 + 0.3161592 = -0.0000014 \end{aligned}$$

となり、今度は最後の引き算で桁落ちが生じている。さらに、上記と同様に (3) の左辺の計算で生じる誤差は ± 0.0000002 となる。³⁾ したがって、同じ式の 0 でもどのくらい 0 に近くなればよいかを決めるには加減算で生じる誤差を考えなければならない。

¹⁾ あえて桁落ちをさせるために (3) 式の解の一つである 251.7970 に近い値をとった。後に記述している $x = 0.0004619157$ についても同様である。

²⁾ ホーナー法とは、ここでは多項式の掛け算の計算を減らす方法である。3 次多項式を例にとると、 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ は掛け算を 6 回行うが、 $x(x(ax + b) + c) + d$ の形にすると掛け算を 3 回行うこととなり、掛け算の回数が減少している。

³⁾ この誤差の計算方法については付録にて記載する。

付録

多項式の計算で、特定の x に対して計算するときには生じる誤差 δ は、絶対値の大きい項にほぼ支配される、よって、多項式 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ において、 a_0x^n の項に対する誤差は

$$\begin{aligned}\delta &\simeq a_0x^n(1+u)^n - a_0x^n \\ &= a_0(nx^nu + n(n-1)x^{n-1}u^2 + \dots + u^n) \\ &= a_0(nx^nu)\end{aligned}$$

となる。したがって、 k 次の項であれば、その値の k 倍に丸めの相対誤差 u を乗じることで誤差が求められるので、

$$\delta \simeq k \times a_{n-k}x^k \times u$$

と表すことができる。10進7桁四捨五入の計算では下一桁の値が0~4のとき切り捨てとなるので、丸めの誤差 u は $5/10^{-7}$ となる。 $x = 251.7980$ のとき式(3)の左辺では、1次と2次の項の絶対値がほぼ等しく、約172345となる。したがって、これら2つを考慮すると最終的な誤差 δ は

$$\delta \simeq (2+1) \times 172345 \times 5/10^{-7} = 0.26$$

となる。また、 $x = 0.0004619157$ のときは1次の項が約0.32で最大となり、2次の項は1次よりもはるかに小さいので無視できる。したがって、求める誤差は

$$\delta \simeq 0.32 \times 5/10^{-7} = 0.0000002$$

となる。