第3章　桁落ちに気をつけよう (その2)

1　“式の値が0に近い”とは (方程式の解の精度的限界)

方程式 $f(x)=0$ の解を見つけることとは, 数値的には $f(x)\approx 0$ となる x を見つけることである.

次のような具体例を考える.

$$f(x)=x^3-15.70875x^2+61.69729x-0.04844725 \tag{1.1}$$

の解は,$x\approx 0.0007853982, x\approx 7.844763, x\approx 7.863201$ である. この解の正確さは, 式の計算の際に生じる丸め誤差のために有効数字に上限ができ, 元の有効数字と同じになるとは限らない. 生じる丸め誤差を具体的に見積もるには, 前章で紹介された方法[*1] を用いて計算すればよい.

- $x\approx 0.0007853982$ の場合,1.1 の各項の丸め誤差のうち最も大きいスケールの丸め誤差を持つと見積もられるのは第3項であり, その値は $\pm 2.5*10^{-8}$ である. よって, この場合の $f(x)$ の丸め誤差は $\pm 2.5*10^{-8}$ と見積もられる.
- $x\approx 7.844763$ の場合,1.1 の各項の丸め誤差はいずれもほぼ同じスケールの丸め誤差を持つため,$f(x)$ の丸め誤差は3つの項の丸め誤差の和を取って ± 0.002 と見積もられる[*2] .
- $x\approx 7.863201$ の場合は $x\approx 7.844763$ の場合とほぼ同じ値となるため,$f(x)$ の丸め誤差も ± 0.002 と見積もられる.

[*1] 前章補注参照：伊理テキスト p13

[*2] 各項の値は $x^3\approx 4.8\times 10^2, -15.70875\times x^2\approx -9.7\times 10^2, 61.69729\times x\approx 4.8\times 10^2$ となり, いずれもほぼ同じスケールとなる. よって各項の値の平均を取った上で, 次数を評価して式の値 $f(x)$ の誤差を求めると

$$\begin{aligned}\delta f(x) &= (3+2+1)\times\frac{20}{3}\times 10^2\times\frac{1}{2}\times 10^{-6}\\ &= 20\times 10^{-4}\\ &= 0.002\end{aligned}$$

以上より, 式 $f(x)$ の値そのものに対する丸め誤差が出るために, その誤差以上の精度で $f(x)$ を 0 に近づけようとする努力には意味がない. 結論として,$f(x)$ の誤差は前章で学んだ計算方法に起因するものといま上で見た x の値に応じた誤差に起因するものがあり, 算法設計の際にはこの二つの誤差を十分に考慮しなければならないということがわかる.

さらに, 解の精度は f(x) の傾きに応じて変わる[*3]. ただし, 接線近似自体が実際の関数曲線からわずかにずれるため, ここでも誤差が発生する.

これを考えれば, 一般に流通している収束判定条件[*4]

$$\left| x^{(\nu)} - x^{(\nu-1)} \right| < \epsilon \tag{1.2}$$

を使った計算法についても, 解の位置に誤差があることを考慮したうえで計算を終了する条件 ϵ を決定しなければならないのは明白である. ただし $x^{(\nu)}$ は ν 番目の x のことである.

2 多数の数を加えるときに注意すべきこと (情報落ち・積み残し)

多数の数の和を取る時, 徐々に大きくなる被加算項に対して加算項が相対的に小さくなると, 扱える桁数に限界があるために加算からはみ出る, あるいはそもそも加算されないというような状況が起こり得る. これを情報落ち, あるいは積み残しと呼ぶ. 具体的な例として, 次のような定積分を考える.

$$I = \int_a^b f(x)\ dx \tag{2.3}$$

これを台形則近似によって解こうとすれば,

$$I = \frac{b-a}{N}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{n=1}^{N-1} f\left(a + \frac{n}{N}(b-a)\right) + \frac{1}{2}f(b)\right] \tag{2.4}$$

を計算することになり,N を大きくしていくことでより本来の値に近づけることができるが, その代わり加算項が細分化され小さくなるため, 前述の積み残しが発生する可能性が出てくることになる. ただしこの N は分割数を表す.

[*3] 具体例は伊理テキスト p15 参照

[*4] 繰り返し計算を用いて方程式の解を求めようとするとき, 連続する二つの x の値の差が ϵ 未満になれば, その x を解として採用する方法.