2 積み残しの典型例

多数の数の和の計算において被加数の大きさに比べて和の大きさがはるかに大きくなる場合, 丸め誤差のために被加数の情報がすっかりこぼれおちてしまう. 加減算に伴う丸め誤差が蓄積していく現象を「積み残し」と言うのであった.

ここではさらに具体的な例を考えてみよう.

2.1 常微分方程式の初期値問題の数値解法

常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.1}$$

の厳密解は,

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi + y(x_0) \tag{2.2}$$

である.

これを計算機で数値計算できるように離散近似すると,

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \tag{2.3}$$

となる.

ただし,

$$x_{n+1} = x_n + h, f_n = f(x_n, y_n).$$

式 (2.1) から式 (2.2) を導くには, まず, 積分区間を n 分割し,

$$y_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(\xi, y(\xi))d\xi + y(x_n) \tag{2.4}$$

とあらわす (離散化). ここで区間 $x_n < x < x_{n+1}$ において $f(x_n)$ の値 は一定であ

ると仮定すれば, 式 (2.4) は,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(\xi, y(\xi))d\xi + y(x_n) \\ &\sim f(x_n, y_n) \int_{x_n}^{x_{n+1}} d\xi + y_n \\ &= f_n(x_{n+1} - x_n) + y_n \\ &= f_n h + y_n \end{aligned}$$

となり, 式 (2.3) を得る. ただし, $x_{n+1} - x_n = h$, $f_n = \dfrac{d}{dx_n} f(x_n)$ である.

こうして得られた式 (2.3) をよく見てみれば, 積み残しの起こることは想像に難くない. つまり, n を無限大にもっていき, 刻み幅 h を極端に小さくすることを考える. すると, 計算がある n に達したとき y_{n+1} に比べて被加数 hf_n が丸め誤差として計算に反映されなくなってしまう.

2.2 大量の統計データからその平均と分散を計算する

2 つ目の典型例は, 1 円玉 30 個の目方を精密天秤で量り, それら目方のデータの平均と分散を求めるというものである. 本文 17 ページ表 3-1 を以下に掲載する.

表 3-1 1 円玉の目方 (単位:g)

0.9997	1.0007	0.9995	1.0002	1.0001	1.0004
1.0005	0.9998	0.9996	1.0004	1.0004	1.0004
0.9993	0.9999	0.9988	1.0001	0.9999	0.9994
0.9997	0.9991	1.0002	1.0004	0.9989	0.9989
1.0000	1.0009	1.0006	0.9993	0.9997	1.0001

このデータを用いて実際に平均 $\bar{x}$ と 分散 v を計算してみる.
目方を $x_i(i = 1, \cdots, n; n = 30)$ とし,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.5}$$

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \tag{2.6}$$

を用いて 2 進 24 桁の精度 (丸めは 0 捨 1 入) で行った. 実際のプログラムは付録を参照のこと.

結果は

$$\bar{x} = 0.99989671$$
$$v = 1.78813934 \times 10^{-7}$$

となった.
尚, v を定義式

$$v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2.7}$$

で計算すると,

$$v = 3.08314554 \times 10^{-7}$$

となった[1].

この食い違いはもちろん, 積み残しに依るものである.

[1] この違いは使用するコンパイラに依存する. 例えば富士通 Fortran だと結果に違いは生じなかった.