第 7 章　常微分方程式の初期値問題

古くは弾道計算にはじまり, 近頃ではロケットの軌道計算まで, 常微分方程式の初期値問題として定式化される実際問題はきわめて多い. そしてそれらの問題のほとんどは解析的に解くことが不可能あるいは困難なため, 数値解法を用いざるを得ない.

上述の通り古くから需要があったこともあり, 本格的な数値解法の研究は一世紀以上の歴史がある. 研究に伴いその技術も高度に分化しているため, 全貌を知るのは容易ではない.

その一方で, とりあえずオイラー法[*1]があれば十分であるとの考え方や, とりあえずルンゲ・クッタ法[*2] を使えば高精度解が得られるという考え方, さらには古典的なミルン法が改変されないまま用いられていたりという狭量な見識が多いというのもまた事実である.

常微分方程式の初期値問題の数値解法は, 数値積分法の親玉みたいなものであり, 数値積分法を扱った第 7 章で述べた事柄[*3]はここでも通用する.

1　常微分方程式の初期値問題

微分方程式

$$\frac{d}{dt}x = f(x,t) \text{ ただし } (a \le t \le b) \tag{1}$$

および初期条件

$$x(a) = x_0 \tag{2}$$

を与えて関数 $x(t)$ $(a \le t \le b)$ を求めるというような問題が常微分方程式の初期値問題である.

関数 $f(x,t)$ が変な関数[*4]で無いならば,(1) と (2) を満たすような関数 $x(t)$ が一意に定ま

[*1] オイラー法は 1 次精度である. すなわちテイラー展開の際に 1 次の項以降を切り捨てている

[*2] ルンゲ・クッタ法は 4 次精度である.

[*3] 分割数を増やしすぎると積み残しが出ることなど. 第 7 章は詳しく取り上げていないのでそれ以上の注意点はよくわからない.

[*4] δ 関数等の不連続関数

るというのが, 常微分方程式論の基本的な定理である.

連立[*5]常微分方程式の場合も基本的な考え方は一緒であり,

$$\frac{d}{dt}x^i = f^i(x^1, x^2 \dots x^m, t) \text{ ただし } (a \le t \le b)(i = 1, \dots, m) \tag{3}$$

および初期条件

$$x^i(a) = x^i_0 \tag{4}$$

を与えて関数 $x^i(t)$ $(a \le t \le b)$ を求めるというような問題としてやれば, 常微分方程式の初期値問題として帰着できる.

さらに高階の微分方程式[*6] も, 複数階微分の項そのものを変数として置き換えてしまえば, 常微分方程式の初期値問題として帰着できる.

もし与えられた微分方程式が最高階の導関数に関して解けた形になっていないときは, その最高階の導関数に関して「数値的に解く」サブルーチンを用意すればよい[*7] .

2 Euler 法

オイラー法とは常微分方程式の初期値問題を解くもっとも原始的な解法である. 刻み幅と呼ばれる量 h を仮に置き, 独立変数 t を

$$t_n = a + nh(\text{ただし } n = 0, 1, 2, \dots) \tag{7}$$

というように刻み幅ごとにずらしていったときに, その都度各未知関数の値 $x^i(t_n)$ の近似値 x^i_n を

$$\begin{aligned} x^i_{n+1} &= x^i_n + hf^i_n \\ f^i_n &\equiv f^i(x^1_n, \dots, x^m_n, t_n) \end{aligned} \tag{8}$$

[*5] 関数 x が複数あるような微分方程式

[*6] 複数階微分の項を含む微分方程式

[*7] $g(x^1, x^2, \dots, x^m,) = 0$ が最高階の導関数に関して解けないような例として, 以下の場合を考える.

$$\log\left(\frac{dx}{dt}\sin\left(\frac{d^2x}{dt^2}x\right)\right) - \frac{d^2x}{dt^2} - k = 0 \tag{5}$$

これを最高階 (この例では二階の項) を一階として, それ未満の階数 (この例では一階の項) を他の x と同じただの変数として扱うと, 以下のように一階の常微分方程式に帰着できる.

$$\log\left(x^2\sin\left(\frac{dx^2}{dt}x^1\right)\right) - \frac{dx^2}{dt} - k = 0 \text{ ただし } (x = x^1)(\frac{dx}{dt} = x^2) \text{ と置いている.} \tag{6}$$

として次々と定めていく方法である．この方法は初期条件 $x^i(0)$ が与えられているために可能である．

(8) は $t = t_n$ における微分方程式 (3) の左辺を

$$\frac{dx^i}{dt} \approx \frac{x^i_{n+1} - x^i_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{x^i_{n+1} - x^i_n}{h} \tag{9}$$

で置き換えたものである．

ここで具体例として以下の問題を解いた場合について考える．

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2, x(0) = 0, (0 \leq t \leq 1.6) \tag{10}$$

実際に問題を解くときに困るのは, 刻み幅 h の値と, その h を用いて得られた数値解がどこまで良く近似しているかという点である．これらについては各論あるが, 結局のところ f^i が良く知られた関数でない限りはよくわからない．実践的には, 区間 $[a, b]$ で何点かという程度のかなり大きめの h を設定しておき,h の幅を徐々に半分にしていきながら繰り返し同じ問題を解くのが良い．．これを試してみると, 最初は h と $h/2$ の数値解がかなり食い違うが, 徐々にある値に近づいていく様子が見られる．

数値解の誤差は,h を半分にすると約半分になるという傾向がある．これを踏まえれば, 小数点以下 2 桁まで正しければよい場合はそれと同じオーダー (小数点以下 2 桁) の刻み幅を用いた場合の解を採用すればよい[*8]．また, この性質はオイラー法が正しく機能しているかどうかの指標にもなる．

このように多くの刻み幅による計算を試みなければならず, しかも最終的な解を求める計算以外は実質無駄である．しかしながらこの「無駄」の量を見積もってみると, 結局はせいぜい「有効な手間」と同じ程度である[*9]．このように, たかだか 2 倍の計算量で結果に対する自信と保証とが得られると考えれば, さほど無駄は大きくないと捉えることもできる．微分方程式の数値解に時々現れる「不安定現象」[*10]や「幻影解」[*11]とかも, このように眺めればすぐに発見できる．

[*8] この刻み幅を用いた時の解の誤差は, この時の解とその前の刻み幅 (小数点以下 1 桁) による解の差程度となる

[*9] ある刻み幅で解を求める時の計算量 $= 2 \times$ (その半分の刻み幅で解を求める計算) だからである．

[*10] 解の発散のことである

[*11] 3 つの t を用いて計算すると出てくる計算上の解のことである