

第 8 章 偏微分方程式の数値解法の基礎 1¹⁾

8.1 歴史的経緯

数値天気予報の歴史

- **Wilhelm Bjerknes(1904)**
大気運動の支配方程式を積分することで予測できることを最初に指摘.
- **Richardson(1922)**
初めて数値天気予報を実行. しかし, 得た結果は満足できない結果²⁾.
- **Courant, Friedeichs and Lewy(1928)**
移流方程式を数値的に解く場合の安定性条件を提示³⁾.
- **Rossby(1930 年代後半)**
ロスビー波解の導出, また大気の大規模運動を近似的に記述するには渦度方程式を解けば十分であることを指摘.
- **Charney, Fjørtoft and von Neumann(1940 年代後半)**
ENIAC(Electronic Numerical Integrator and Computer)⁴⁾により, 渦度方程式を解き実用的な数値天気予報に成功.
- **その後**
基礎方程式はプリミティブ方程式 (primitive equation)⁵⁾, これに物理過程 (放射, 降水等) を導入したものを解く. 実際の計算は渦度方程式と発散方程式を用いて行う.

¹⁾本章は F.Megingær and A.Arakawa(1976) の第 1 章 INTRODUCTION; GENERAL REMARKS ABOUT GRID POINT METHODS の内容をまとめたものである.

²⁾6 万 4 千人で計算しないと天気は予報できないと指摘した

³⁾これを CFL 条件という.

⁴⁾1945 年に登場した世界初の電子計算機

⁵⁾大規模な大気の運動を記述する非線形微分方程式群.

モデルの話

大気大循環モデル (General Circulation Model : GCM) の計算は等温静止大気を初期条件とすることが多い。これにより、モデルで用いている数値解法と物理過程の性質をよく知ることができる。

実際は GCM 以外の大気モデルもあるが今回は大気の大規模運動の予報, またはシミュレーションのための手法に焦点を置く。

8.2 運動方程式の数値解法

運動方程式の数値解法は主に格子点法, ラグランジュ法, スペクトル法の 3 種類がある。

8.2.1 格子点法 (Grid point method)

対象領域をあらかじめ有限個の点 (格子点⁶⁾) に分割し, 格子点上に従属変数を定義する。

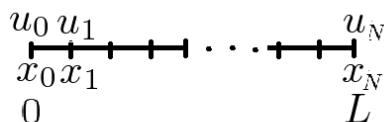


図 8.2.1: 1次元 ($0 \leq x \leq L$, $L = N\Delta x$ のとき)

格子点は空間に固定. よってオイラー的視点に立って式を解く⁷⁾.

8.2.2 ラグランジュ法

個々の流体粒子に着目し⁸⁾, その位置と運動量を計算する方法. 流体が動くとき元の格子を作りなおさなくてはならないので手間がかかり計算が大変.

ラグランジュ法の欠点を改善した方法としてセミラグランジュ法がある。

⁶⁾格子点はメッシュ(mesh)とも呼ぶ

⁷⁾つまり独立変数は座標と時間

⁸⁾つまり独立変数は時間とラベル

セミラグランジュ法

格子点を空間に固定し $x = j\Delta x, t = n\Delta t$ での u の値 u_j^n を求める方法. このとき u_j^n の点の上流にある点 u_j^{n-1} の重みを付けた和として表す.

現在では水蒸気量などのスカラー量の移流計算で標準の方法.

8.2.3 スペクトル法

従属変数を空間方向に直交関数を用いた級数で展開し, 展開係数の時間発展を解く方法. このとき, 元の偏微分方程式は, 切断波数の数の常微分方程式の集まりになる. 例として $0 \leq x < L$ で周期境界の場合を考えると, $u(x, t)$ を従属係数 $\hat{u}_n(t)$ とフーリエ級数で展開する.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n(t) e^{-i \frac{2\pi n x}{L}}$$

N を切断波数とする従属係数 $\hat{u}_n(t) (n = 0, \dots, N)$ の時間発展を解く.

8.3 格子点法の基礎

空間格子点上に定義された従属変数に関する方程式を解く. よって変数は時間空間方向に離散的に表現されて微分は差分で表される. そのため有限差分法 (finite difference method) と呼ばれる.

8.3.1 変数の定義

独立変数を x とする関数

$$u = u(x)$$

を考える. $u(x)$ は領域 $R(0 \leq x \leq L)$ で定義されるとする.

R を一定の間隔 Δx^9 で分割し, 格子点を定義する.

⁹⁾ Δx は格子間隔 (grid interval または grid length) と呼ぶ.

R を J 個に分割すると, $u(x)$ は, $x = j\Delta x (j = 0, 1, \dots, J)$ 上の点で与えられて

$$u_j = u(j\Delta x) \quad (j = 0, 1, \dots, J)$$

となる.

8.3.2 有限差分に伴う情報落ち

差分近似が完璧であっても離散化された $u(j\Delta x)$ は元の連続量である $u(x)$ に比べると表現可能な情報が減る. これを有限波数で切断したフーリエ級数を用いて示す. $0 \leq x \leq L$ のとき $u(x)$ のフーリエ級数展開は

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\frac{J}{2}} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x \right).$$

切断波数は $\frac{J}{2}$ になるのは元の格子点上の変数 u_j の数が $J + 1$ 個のためである¹⁰⁾. このとき, もっとも波長の短い成分は $n = \frac{J}{2}$ の成分として与えられる. このとき, 波長 λ は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{L}{n} \\ &= \frac{J\Delta x}{\frac{J}{2}} \\ &= 2\Delta x. \end{aligned}$$

これよりも短い波長の成分は表現できない.

8.3.3 微分の差分表現とその精度

$x = j\Delta x$ における u の微分 $\left. \frac{du}{dx} \right|_j$ を考える. これを差分で表すとき, その方法は複数ある

・前方差分

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \quad (8.3.1)$$

¹⁰⁾ a_n が $\frac{J}{2}$ 個, b_n が $\frac{J}{2}$ 個, a_0 で 1 個の合計 $J + 1$ 個の情報になる. よって, 切断波数を $\frac{J}{2}$ 以上取っても元の情報よりも多い数の計算をしてしまうことになる. つまり $N > \frac{J}{2}$ は意味がない.

・ 中心差分

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

・ 後方差分

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_j \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}$$

どれも $\Delta x \rightarrow 0$ の極限で $\left. \frac{du}{dx} \right|_j$ に一致する.

差分の精度はテイラー展開を用いて調べることができる. 例として (8.3.1) の場合を考える.

u_{j+1} を $x = j\Delta x$ の周りでテイラー展開する.

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= u((j+1)\Delta x) \\ &= u(j\Delta x) + \left(\frac{du}{dx} \right)_j \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_j (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

ここで $u_j = u(j\Delta x)$ なので右辺第 1 項を左辺に移行し, 両辺を Δx で割ると

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = \left(\frac{du}{dx} \right)_j + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_j \Delta x + \dots$$

ここで右辺第 1 項は真の値となり, 真の値と $\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$ との誤差を ϵ とすると,

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_j \Delta x + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_j (\Delta x)^2 + \dots$$

この ϵ を打ち切り誤差という.

打ち切り誤差を図る尺度として近似精度の次数 (order of accuracy) がある. これは ϵ に含まれる Δx に関する最低次の項の次数を指す. (8.3.1) の場合 ϵ に Δx の 1 次の項があるので, その精度は 1 次であり,

$$\epsilon = O(\Delta x)$$

と表す.

8.4 有限差分法

線形の 1 次移流方程式に対象を絞る. $u = u(x, t)$, $c > 0$ のとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8.4.1)$$

この偏微分方程式の解析解は次のように求められる.

初期条件は $u(x, 0) = F(x)$ とする. $\xi \equiv x - ct$ としたとき, 独立変数を x, t から ξ と t に変換する.

$$u(x, t) = U(\xi, t)$$

u を t で偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (8.4.2)$$

u を x で偏微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (8.4.3)$$

(8.4.2) と (8.4.3) を (8.4.1) に代入する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= -c \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &= \frac{\partial U}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ を解けば良い.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$$U(\xi, t) = f(\xi).$$

よって $u(x, t) = f(x - ct)$. 初期条件をあてはめて

$$u(x, t) = F(x - ct). \quad (8.4.4)$$

$x - ct = x_0$ (const) のとき u も一定になる. (x, t) 座標系において $x - ct = x_0$ の線上の (x, t) は同じ $u(x, t)$ の値を持つ, この線を特性曲線という.

(8.4.1) を空間方向に後方差分¹¹⁾, 時間方向に前方差分を用いて差分化する.

¹¹⁾ $c > 0$ なので上流差分ともいう

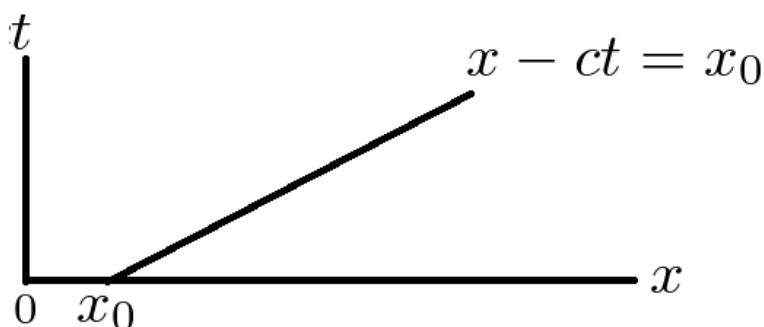


図 8.4.1: $x - ct = x_0$ のときの特性曲線

$x = j\Delta x$ において

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (8.4.5)$$

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ で差分式が元の式に一致するとき, 差分式の解 (数値解) も真の解に一致するだろうと考える.

数値解の精度は $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ で与えられる. 数値解の精度は予測できないが差分式の精度は評価できる.

打ち切り誤差は

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)_j \Delta t + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 u}{dx^3} \right)_j (\Delta t)^2 + \dots \\ & - c \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)_j \Delta x + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 u}{dx^3} \right)_j (\Delta x)^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

よって, (8.4.5) の精度は

$$\epsilon = O(\Delta t, \Delta x)$$

で時間空間ともに 1 次精度である¹²⁾.

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ で差分式が元の式に一致するとき, その差分式は適合性 (consistency) を持つという.

¹²⁾一般的には時間差分の精度と空間差分の精度は一致しない

8.5 収束性

収束性とは $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ のとき, 数値解が真の解に一致することである¹³⁾.

例として (8.4.1) を考える.

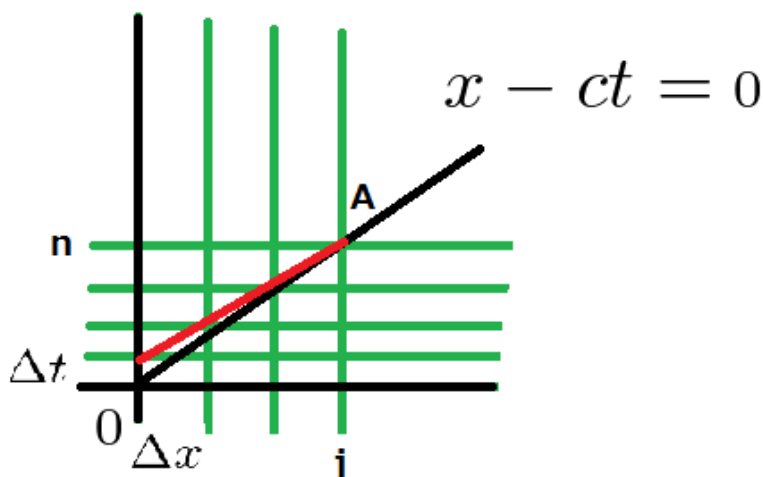


図 8.5.1: $x - ct = 0$ で $c\Delta t \leq \Delta x$ のときの特性曲線

$x - ct = 0$, $u(j\Delta x, n\Delta t)$ の点を A とすると図 (8.5.1) のようになる. 連続系の式において点 A の解は原点の解と同じである. 差分系の式においては点 A の解は赤線より下側の格子点上の値で表現される. 赤線より下側の領域を依存領域 (domain of dependence) と呼ぶ. Δt と Δx の比の値が変わらない限り依存領域は変化しない.

収束条件は依存領域が真の解の特性曲線を含むことである.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{c} \\ c\Delta t &\leq \Delta x \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

(8.5.1) を CFL 条件という.

8.6 安定性 (stability)

$n \rightarrow \infty$ で数値解 $u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界なとき, その差分式は安定であるという¹⁴⁾.

¹³⁾厳密には $n\Delta t$ を固定し, $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ のとき $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t) \rightarrow 0$ となること. 適合性を持つ差分式から得られた数値解が収束性を持つとは限らない.

¹⁴⁾正確には $\Delta x, \Delta t$ を固定し, $n \rightarrow \infty$ としたとき真の解と数値解との誤差 $u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$ が有界であるときに安定であるという

差分式の安定性の判定法には 3 通りの方法がある.

8.6.1 直接法 (direct method)

真の解は有界であることを知っているとする. このとき数値解の絶対値の最大値が有界であるかどうかを調べる.

(8.4.5) を変形する.

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} &= 0 \\ u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) &= 0 \\ u_j^{n+1} &= \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{c\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n. \end{aligned}$$

ここで $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \mu$ とおくと

$$u_j^{n+1} = (1 - \mu) u_j^n + \mu u_{j-1}^n. \quad (8.6.1)$$

収束性の条件から

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{c} \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq 1 \\ 1 - \mu &\geq 0, \end{aligned}$$

よって安定性条件は

$$|u_j^{n+1}| \leq (1 - \mu) |u_j^n| + \mu |u_{j-1}^n|. \quad (8.6.2)$$

$t = (n + 1)\Delta t$ での $|u_j^{n+1}|$ の最大値を $Max_{(j)} |u^{n+1}|$ とし, $t = n\Delta t$ での $|u_j^n|$ の最大値を $Max_{(j)} |u_j^n|$ とする. このとき安定性条件 (8.6.2) は

$$\begin{aligned} Max_{(j)} |u_j^{n+1}| &\leq Max_{(j)} |(1 - \mu)u_j^n + \mu u_{j-1}^n| \\ &\leq (1 - \mu)Max_{(j)} |u_j^n| + \mu Max_{(j)} |u_{j-1}^n| \\ &= Max_{(j)} |u_j^n| \end{aligned}$$

となる¹⁵⁾.

直接法は非常に単純な判定法である. しかし, 実際に適用できる例は限られる.

¹⁵⁾第 3 行目の変形では $Max_{(j)} |u_j^n|$ の u が同じ時刻での最大値なので $Max_{(j)} |u_{j-1}^n| = Max_{(j)} |u_j^n|$ となることを用いた.

8.6.2 エネルギー法 (energy method)

数値解 u_j^n の 2 乗の和 $\sum_j (u_j^n)^2$ が有界であるかを調べる方法¹⁶⁾.

(8.6.1) から $\sum_j (u_j^{n+1})^2$ を計算する.

$$(u_j^{n+1})^2 = (1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n.$$

j について和をとる.

$$\sum_j (u_j^{n+1})^2 = \sum_j [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n]. \quad (8.6.3)$$

ここで周期境界条件とすると $u_{-1}^n = u_J^n$ となるので (8.6.3) は

$$\begin{aligned} \sum_j (u_{j-1}^n)^2 &= (u_{-1}^n)^2 + (u_0^n)^2 + (u_1^n)^2 + \cdots + (u_{J-1}^n)^2 \\ &= (u_J^n)^2 + (u_0^n)^2 + (u_1^n)^2 + \cdots + (u_{J-1}^n)^2 \\ &= \sum_j (u_j^n)^2 \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

さらにシュヴァルツの不等式¹⁷⁾ を用いると

$$\begin{aligned} \sum_j u_j^n u_{j-1}^n &\leq \sqrt{\sum_j (u_j^n)^2} \sqrt{\sum_j (u_{j-1}^n)^2} \\ &= \sum_j (u_j^n)^2. \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

また, 収束性から $1 - \mu \geq 0$ でなければならない. このとき, (8.6.3) から

$$\begin{aligned} \sum_j (u_j^{n+1})^2 &= \sum_j [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_{j-1}^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu u_j^n u_{j-1}^n] \\ &\leq \sum_j [(1 - \mu)^2 (u_j^n)^2 + \mu^2 (u_j^n)^2 + 2(1 - \mu)\mu (u_j^n)^2] \\ &= [(1 - \mu)^2 + \mu^2 + 2(1 - \mu)\mu] \sum_j (u_j^n)^2 \\ &= \sum_j (u_j^n)^2 \end{aligned}$$

である.

¹⁶⁾物理学に適用した場合, $(u)^2$ はエネルギーに比例する量なのでエネルギー法と呼ばれる.

¹⁷⁾

$$\sum ab \leq \sqrt{\sum a^2} \sqrt{\sum b^2}$$

8.6.3 フォンノイマン法 (Von Neumann's method)

差分式での数値解をフーリエ級数と展開係数で展開し, 展開係数が有界であるかどうかを調べる方法. 直接法, エネルギー法と異なり実際に数値計算をしなくても安定性を議論できる方法なので最もよく用いられる方法である.

分かりやすくするために一次元線形移流方程式を例にとる.

連続系の場合では一次元線形移流方程式は (8.4.1) となる¹⁸⁾. ここで k を波数として $u(x, t)$ を空間方向にフーリエ級数展開すると

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[U(t)e^{ikx}].$$

展開係数 $U(t)$ は

$$\frac{\partial U}{\partial t} + ikcU = 0$$

を満たす. 解は

$$U(t) = U(0)e^{-ikct}.$$

従って

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[U(0)e^{ik(x-ct)}]. \quad (8.6.6)$$

次に差分式の場合を考える. 各格子点上の予報変数 u_j^n を空間方向にフーリエ級数展開すると

$$u_j^n = \operatorname{Re}[U^{(n)}e^{ikj\Delta x}]. \quad (8.6.7)$$

(8.6.7) を一次元線形移流方程式を差分近似した式 (8.4.5) へ代入する¹⁹⁾.

$$\begin{aligned} \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} e^{ikj\Delta x} + c \frac{U^{(n)}}{\Delta x} (e^{ikj\Delta x} - e^{ik(j-1)\Delta x}) &= 0 \\ \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} + c \frac{U^{(n)}}{\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x}) &= 0. \end{aligned}$$

¹⁸⁾(8.4.1) を再記する

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

¹⁹⁾(8.4.5) を再記する

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$U^{(n+1)}$ について解くと

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= \left(1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) U^{(n)} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} U^{(n)} e^{-ik\Delta x} \\ &= (1 - \mu)U^{(n)} + \mu U e^{-ik\Delta x}. \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

ここで $U^{(n)}$ の $n \rightarrow \infty$ の挙動を知るために増幅係数 (amplification factor) λ を導入し次のように定義する.

$$\lambda \equiv \frac{U^{(n+1)}}{U^{(n)}}. \quad (8.6.9)$$

(8.6.9) より

$$|U^{(n+1)}| = |\lambda| |U^{(n)}|.$$

右辺を展開すると

$$\begin{aligned} |\lambda| |U^{(n)}| &= |\lambda| |\lambda| |U^{(n-1)}| \\ &= |\lambda| |\lambda| |\lambda| \cdots |U^{(1)}| \\ &= |\lambda|^{n+1} |U^{(0)}| \end{aligned}$$

左辺を展開すると

$$|U^{(n+1)}| = |\lambda| |U^{(n)}|.$$

従って

$$|U^{(n)}| = |\lambda|^n |U^{(0)}|.$$

安定性の条件は B がとある有限の値のとき全ての k に対して

$$|U^{(n)}| = |\lambda|^n |U^{(0)}| < B.$$

よって

$$|\lambda|^n < \frac{B}{|U^{(0)}|}.$$

対数をとって右辺を B' と定義すると

$$n \ln |\lambda| < \ln \frac{B}{|U^{(0)}|} \equiv B'.$$

時刻 t は $t = n\Delta t$ と表されるので

$$\ln |\lambda| < \frac{B'}{t} \Delta t. \quad (8.6.10)$$

ここで有限時間で数値解が有界となる条件を考える. このとき (8.6.10) は

$$\ln |\lambda| \leq O(\Delta t).$$

さらに λ は次のように再定義できるとする²⁰⁾.

$$\lambda \equiv 1 + \delta.$$

δ が微小量るとき $\ln(1 + \delta)$ を $\delta = 0$ の周りで展開すると

$$\begin{aligned} \ln(1 + \delta) &= \ln(1) + \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \dots \\ &\sim \delta \end{aligned}$$

よって

$$\delta \leq O(\Delta t).$$

または

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t). \quad (8.6.11)$$

(8.6.11) の条件は数値解がゆっくりと指数的に増幅することを許す. しかし, 物理的にはそのような解は許容されない. よって (8.6.11) の代わりに

$$|\lambda| \leq 1 \quad (8.6.12)$$

を安定性の条件とする²¹⁾. 安定性の条件が出たので実際に (8.6.8) での λ を求める. (8.6.8) を再記すると

$$U^{(n+1)} = (1 - \mu)U^{(n)} + \mu U e^{-ik\Delta x}.$$

²⁰⁾ 増幅するのは高々 1 程度だろうと考える

²¹⁾ $U^{(n+1)}$ の前方差分式から

$$\begin{aligned} \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} &\approx \left. \frac{dU}{dt} \right|_n \\ U^{(n+1)} &\approx U^{(n)} + \left. \frac{dU}{dt} \right|_n \Delta t \end{aligned}$$

ここで (8.6.9) より

$$\begin{aligned} \lambda U^{(n)} - U^{(n)} &\approx \left. \frac{dU}{dt} \right|_n \Delta t \\ \left. \frac{dU}{dt} \right|_n &\approx \frac{(\lambda - 1)}{\Delta t} U^{(n)} \end{aligned}$$

これを解くと

$$U^{(n)} \approx U^{(0)} e^{\frac{\lambda-1}{\Delta t} n \Delta t}$$

ここで $\lambda = 1 + O(\Delta t)$ とすると

$$U^{(n)} = U^{(0)} e^{O(\Delta t) n}$$

ここで $U^{(n+1)} = \lambda U^{(n)}$ とすると

$$\begin{aligned}\lambda &= 1 - \mu + \mu e^{-ik\Delta x} \\ &= 1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1)\end{aligned}\tag{8.6.13}$$

$$\begin{aligned}|\lambda|^2 = \lambda \cdot \lambda^* &= (1 + \mu(e^{-ik\Delta x} - 1))(1 + \mu(e^{ik\Delta x} - 1)) \\ &= 1 + \mu(e^{ik\Delta x} - 1) + \mu(e^{-k\Delta x} - 1) + \mu^2(e^{ik\Delta x} - 1)(e^{-ik\Delta x} - 1) \\ &= 1 + 2\mu(\cos k\Delta x - 1) + \mu^2(2 - 2\cos k\Delta x) \\ &= 1 - 2\mu(1 - \cos k\Delta x)(1 - \mu)\end{aligned}\tag{8.6.14}$$

よって、 $|\lambda|^2 \leq 1$ であるためには $1 - \mu \geq 0$ でなければならない。

(8.6.14) で記述される $|\lambda|^2$ の性質を見る。 $k\Delta x$ を固定して、 $0 \leq \mu \leq 1$ で $|\lambda|^2$ がどう変化するかを考える。 $|\lambda|^2$ を u の関数として見ると、 $|\lambda|^2$ は u の 2 次関数であり、その極値は

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\mu} = 0$$

となる u で与えられる。 よって

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\mu} = -2(1 - 2\mu)(1 - \cos k\Delta x)$$

となるので $\mu = \frac{1}{2}$ で極小値をとり、曲線の傾きは $k\Delta x$ が大きいほど、つまり波長が短いほど大きくなる。 最小波長は $2\Delta x$ ²²⁾。 このとき $|\lambda|^2 = 0$ となる。

これは $\frac{O(\Delta t)}{\Delta t} > 1$ のときに指数的に増幅してしまう。 確実に減衰するためには

$$\begin{aligned}\frac{\lambda - 1}{\Delta t} &\leq 0 \\ \lambda - 1 &\leq 0 \\ \lambda &\leq 0\end{aligned}$$

の必要がある。 よって $|\lambda| \leq 1$ 。

²²⁾

$$\begin{aligned}k &= \frac{2\pi}{2\Delta x} \\ &= \frac{\pi}{\Delta x}\end{aligned}$$

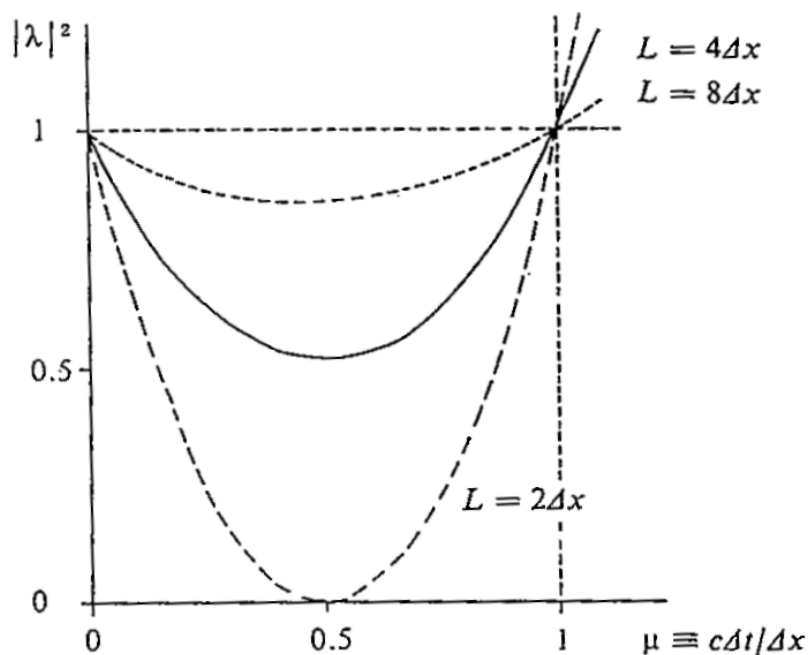


図 8.6.1: $L = k\Delta x$ としたときの $|\lambda|^2$ の図 (F.Mesinger and A.Arakawa(1976) の p.8 の Figure 6.1).

図 (8.6.1) から分かるとおり波長が小さいほど増幅係数は小さく, 短波長成分ほど, 数値的に減衰しやすい²³⁾.

²³⁾ $\mu = \frac{1}{2}$ にすると $L = 2\Delta x$ の成分は 1 ステップ計算で 0 になる.