第9章　偏微分方程式の数値解法の基礎 2 -時間差分法-

我々の目的は偏微分方程式を解くことであるが, この章では独立変数, 従属変数がともに 1 つの常微分方程式に付いて考える. なぜなら実際の問題も連立常微分方程式を解く問題に帰着されることがあるからである. また, 常微分方程式の差分式が偏微分方程式を解く際にも使うことができるからである.

いくつかの時間差分スキームを具体的な常微分方程式にあてはめて考える. 取り上げる常微分方程式は, 振動方程式と摩擦方程式である.

$$\frac{dU}{dt} + i\omega U = 0 \qquad (\omega \in \mathbf{R}), \tag{9.0.1}$$

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = 0 \qquad (\alpha \in \mathbf{R}). \tag{9.0.2}$$

1　時間差分スキームの定義

以下のような常微分方程式を考える.

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t).$$

時間差分スキームを考える前に,「レベル (段階数)」という概念を知っておく必要がある. レベルとはつまり, 時刻 $t = (n+1)\Delta t$ の U^{n+1} を求める差分式に, いくつの異なる時刻の U^n が現れているか, ということである.

1.1　2 段階数 (two-level) スキーム

2 段階スキームとは, U^{n+1} を U^n を用いて求めるスキームである.

イ) オイラー・スキーム (前方差分スキーム)

$$
\begin{aligned}
\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} &= f^n, \\
U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^n. \qquad (9.1.3)
\end{aligned}
$$

但し, $f^n = f(U^n, n\Delta t)$ である. オイラー・スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{オイラー}}$ は次の通りである. $U((n+1)\Delta t)$ を $n\Delta t$ のまわりでテイラー展開して,

$$
U((n+1)\Delta t) = U(n\Delta t) + \left.\frac{dU}{dt}\right|_{n\Delta t} \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_{n\Delta t} (\Delta t)^2 + \cdots
$$

より,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{オイラー}} &= \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - f^n \\
&= \left.\frac{dU}{dt}\right|_n + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_n \Delta t + \cdots - f^n \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_n \Delta t + \cdots .
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$
\varepsilon_{\text{オイラー}} = O(\Delta t).
$$

ロ) 後退差分スキーム

$$
\begin{aligned}
\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} &= f^{n+1}, \\
U^{n+1} &= U^n + \Delta t f^{n+1}. \qquad (9.1.4)
\end{aligned}
$$

但し, $f^{n+1} = f(U^{n+1}, (n+1)\Delta t)$ である. 後退差分スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{後退}}$ は次の通りである.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{後退}} &= \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - f^{n+1} \\
&= \frac{1}{\Delta t}\left[U^{n+1} - \left(U^{n+1} - \left.\frac{dU}{dt}\right|_{n+1} \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_{n+1} (\Delta t)^2 + \cdots\right)\right] - f^{n+1} \\
&= -\frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_{n+1} \Delta t - \cdots .
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$
\varepsilon_{\text{後退}} = O(\Delta t).
$$

(9.1.4) は求めたい値である U^{n+1} 自体が右辺に現れている. この様なスキームを陰的なスキーム (implicit sheme) という.

ハ) 台形スキーム

修正オイラー・スキームとも, 2 次のルンゲクッタスキームとも呼ばれる.

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(f^n + f^{(n+1)}\right),$$
$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{2}\Delta t\left(f^n + f^{n+1}\right). \qquad (9.1.5)$$

台形スキームの打ち切り誤差 $\varepsilon_{\text{台形}}$ は次の通りである.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{台形}} &= \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(f^n + f^{(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}f^n \\
&+ \frac{1}{2}\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}f^{n+1} \\
&= \frac{\left(\varepsilon_{\text{オイラー}} + \varepsilon_{\text{後退}}\right)}{2} \\
&= \frac{1}{3}\left.\frac{d^3U}{dt^3}\right|_n (\Delta t)^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\varepsilon_{\text{台形}} = O(\Delta t^2).$$

ニ) 松野スキーム (前進・後退スキーム)

松野スキームは 2-level, 2-stage (2 段階 2 段) のスキームである.

$$U^* = U^n + \Delta t f^{(n)},$$
$$U^{n+1} = U^n + \Delta t f^{(*)}. \qquad (9.1.6)$$

但し, $f^* = f(U^*, (n+1)\Delta t)$ である. 打ち切り誤差は $\varepsilon = O(\Delta t)$ である. なぜならば,

$$\begin{aligned}
f^* &= f^n + \frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^2) \\
&= f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t + O(\Delta t^2),
\end{aligned}$$

$$U^{n+1} = U^n + \left.\frac{dU}{dt}\right|_n \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_n \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

であるため,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{松野} &= \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - f^* \\
&= \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dt^2}\Delta t + O(\Delta t^2) - \left[f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t + O(\Delta t^2)
\end{aligned}
$$

であるからである.

ホ) ホインスキーム

$$
\begin{aligned}
U^* &= U^n + \Delta t f^n, \\
U^{n+1} &= U^n + \frac{1}{2}\Delta t (f^n + f^*).
\end{aligned} \tag{9.1.7}
$$

但し, $f^* = f(U^*, (n+1)\Delta t)$ である. 精度は $\varepsilon = O(\Delta t^2)$ である. なぜならば, 松野スキームの時と同様にして,

$$
\begin{aligned}
f^* &= f^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t + O(\Delta t^2), \\
U^{n+1} &= U^n + \left.\frac{dU}{dt}\right|_n \Delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dt^2}\right|_n \Delta t^2 + O(\Delta t^3)
\end{aligned}
$$

なので, $\dfrac{d}{dt}f(U,t) = \dfrac{\partial U}{\partial f}\dfrac{dU}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial t}$ と $\dfrac{dU}{dt} = f$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ホイン} &= \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}(f^n + f^*) \\
&= \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dt^2}\Delta t + O(\Delta t^2) - \left[f^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t + \frac{1}{2}O(\Delta t^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d^2U}{dt^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right] \Delta t - \frac{1}{2}O(\Delta t^2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dU}{dt} - f \right) \Delta t - \frac{1}{2}O(\Delta t^2) \\
&= -\frac{1}{2}O(\Delta t^2)
\end{aligned}
$$

となるからである.