

2.2 反復する 2 段階スキーム (iterative two level schemes)

反復する 2 段階スキームを反復しない 2 段階スキームと同様にまとめて書くと

$$U^{(n+1)*} = U^{(n)} + \Delta t f^{(n)}, \quad (9.2.5.a)$$

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t (\alpha f^{(n)} + \beta f^{(n+1)*}). \quad (9.2.5.b)$$

このとき $\alpha + \beta = 1$ である.

松野スキームの安定性

(9.2.5.a,b) で $\alpha = 0, \beta = 1$ とする.

(9.2.5.a) に振動方程式をあてはめると $f^{(n)} = i\omega U^{(n)}$ なので

$$U^{(n+1)*} = U^{(n)} + i\omega \Delta t U^{(n)}. \quad (9.2.5.c)$$

(9.2.5.b) に振動方程式をあてはめて (9.2.5.c) を代入すると

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^{(n)} + i\omega \Delta t (\beta U^{(n+1)*}) \\ &= U^{(n)} + i\omega \Delta t (\beta U^{(n)} + i\omega \Delta t \beta U^{(n)}) \\ &= (1 + i\omega \Delta t \beta + (i\omega \Delta t)^2 \beta) U^{(n)}. \end{aligned}$$

ここで $\lambda \equiv \frac{U^{(n+1)}}{U^{(n)}}$ とすると

$$\lambda = 1 + i\beta p - \beta p^2. \quad (9.2.6)$$

但し, $p \equiv \omega \Delta t$. さらに $\beta = 1$ より

$$\lambda = 1 + ip - p^2. \quad (9.2.7)$$

ここで安定性を調べるために $|\lambda|$ を求める.

$$\begin{aligned} |\lambda| = \sqrt{\lambda \cdot \lambda^*} &= \sqrt{(1 - p^2 + ip)(1 - p^2 - ip)} \\ &= \sqrt{(1 - p^2)^2 + p^2} \\ &= \sqrt{1 - p^2 + p^4}. \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

安定となるのは $|\lambda| \leq 1$ のときなので

$$|p| \leq 1.$$

ここで $p = \omega \Delta t$ なので

$$|\omega \Delta t| \leq 1.$$

$\Delta t > 0$ より

$$\Delta t \leq \frac{1}{|\omega|}. \quad (9.2.9)$$

松野スキームの p に対する $|\lambda|$ の振舞いを知るために $|\lambda|$ の極値を考える.

$$\begin{aligned} \frac{d|\lambda|}{dp} &= \frac{4p^3 - 2p}{2\sqrt{(p^4 - p^2 + 1)}} \\ &= \frac{p(2p^2 - 1)}{\sqrt{(p^4 - p^2 + 1)}}. \end{aligned}$$

よって, $|\lambda|$ は $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で極値.

$0 < p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲では ω が大きいほど $|\lambda|$ が小さくなる. Matsuno(1966) にて多数の振動数をもつ系では $0 < p < \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるように Δt を与える方が良いと指摘されている¹⁾.

ホインスキームの安定性

ホインスキームの増幅係数は松野スキームと同様に (9.2.5.b) に振動方程式をあてはめて (9.2.5.c) を代入すると

$$\begin{aligned} U^{(n+1)} &= U^{(n)} + i\omega \Delta t (\alpha U^{(n)} + \beta U^{(n+1)*}) \\ &= U^{(n)} + i\omega \Delta t (\alpha U^{(n)} + \beta U^{(n)} + i\omega \Delta t \beta U^{(n)}) \\ &= (1 + i(\alpha + \beta)p - p^2 \beta) U^{(n)}. \end{aligned}$$

ここで松野スキームと同じように λ を定義し, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\lambda = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2. \quad (9.2.10)$$

¹⁾ $0 < p \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の区間だと減衰率が大きいためにノイズになる可能性がある高周波をより早く減衰できる.

安定性を求めるため $|\lambda|$ を求める.

$$\begin{aligned}
 |\lambda| &= \sqrt{\lambda \cdot \lambda^*} = \sqrt{\left(1 + ip - \frac{1}{2}p^2\right) \left(1 + ip - \frac{1}{2}p^2\right)} \\
 &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}p^2\right)^2 + p^2} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}p^4}.
 \end{aligned} \tag{9.2.11}$$

(9.2.11) は $p > 0$ で常に 1 より大きくなってしまいうので振動方程式に対し不安定である. しかし, $p = \omega\Delta t \ll 1$ のとき $|\lambda|$ を $p = 0$ のまわりで展開すると

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{4}p^4\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}p^4 + O(p^8) \\
 &= 1 + \frac{1}{8}p^4 + O(p^8)
 \end{aligned}$$

$p = \omega\Delta t$ なので

$$|\lambda| = 1 + O(\Delta t^4) < 1 + O(\Delta t)$$

となり, 物理的には安定条件を満たしていないがフォン・ノイマン法による安定性の必要条件²⁾は満たしている.

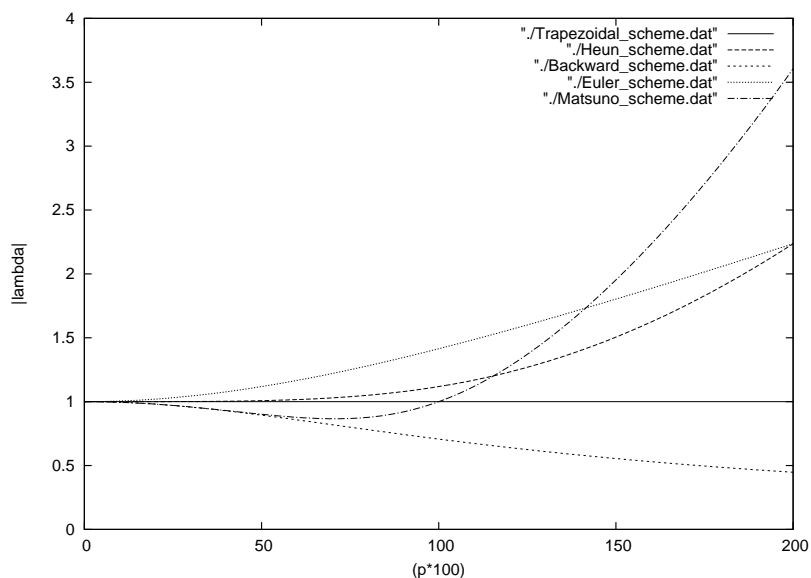


図 9.2.1: p による $|\lambda|$ の振舞い.

²⁾数式から導ける安定性条件

位相

数値解は慣性振動のときに扱ったように

$$U^{(n)} = |\lambda|^n U^{(0)} e^{in\theta} = \lambda^n U^{(0)} \quad (9.2.12)$$

であり, 真の解は

$$U(n\Delta t) = U(0)e^{inp} \quad (9.2.13)$$

である. ここで (9.2.12) の λ を実部 λ_{re} と虚部 λ_{im} に書き直すと

$$U^{(n)} = (\lambda_{re} + i\lambda_{im})^n U^{(0)}. \quad (9.2.14)$$

また, $\lambda_{re} + i\lambda_{im} = |\lambda| e^{i\theta}$ より

$$\tan \theta = \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}.$$

よって,

$$\theta = \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}} \quad (9.2.15)$$

数値解の位相に対する真の解の位相の比は

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}. \quad (9.2.16)$$

(i) オイラースキーム

オイラースキームは $\lambda = 1 + ip$ なので (9.2.16) は

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan p < 1.$$

よって, オイラースキームの場合数値解の位相は真の解に比べて遅く進む.

(ii) 後退スキーム

後退スキームは $\lambda = \frac{(1 + ip)}{1 + p^2}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{p} &= \frac{1}{p} \arctan \frac{\frac{p}{1+p^2}}{\frac{1}{1+p^2}} \\ &= \frac{1}{p} \arctan p \end{aligned}$$

となりオイラースキームと同様に数値解の位相は真の解に比べて遅く進む.

(iii) 台形スキーム

台形スキームは $\lambda = \frac{1}{1+p^2} \left(1 - \frac{1}{4}p^2 + ip \right)$ なので

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}.$$

$p \ll 1$ のとき $p = 0$ の周りで展開すると³⁾

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}$$

³⁾ $\arctan x$ のマクローリン展開を求める.

まず $\frac{1}{1-r}$ を求める. $|r| < 1$ のとき $r = 0$ の周りで展開すると

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

このとき $r = -t^2$ ($|t| < 1$) とすると

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

これを $|x| < 1$ である x に対して 0 から x まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \end{aligned} \tag{a.1}$$

ここで $y = \arctan x$ の x 微分を考える. $y = \arctan x$ の定義より

$$\tan y = x$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d \tan y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \end{aligned}$$

ここで $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx. \tag{a.2}$$

(a.1) と (a.2) から

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p} \arctan \left\{ p \left(p + p^2 + p^4 + \dots \right) \right\} \\
&= \frac{1}{p} \left\{ \left(p + p^3 + p^5 + \dots \right) - \frac{(p + p^3 + p^5 + \dots)^3}{3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p + p^3 + p^5 + \dots)^5}{5} - \dots \right\}. \tag{9.2.17}
\end{aligned}$$

ここで $\frac{p}{1 - \frac{1}{4}p^2}$ を三次以上の寄与を無視すると (9.2.17) は

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p - \frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{5} - \dots \right) \\
&= \frac{1}{p} \arctan p < 1.
\end{aligned}$$

また, 三次までの寄与を考慮すると

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{p} &\approx \frac{1}{p} \left(p + p^3 - \frac{(p + p^3)^3}{3} + \frac{(p + p^3)^5}{5} - \dots \right) \\
&= \frac{1}{p} \left(p + p^3 - \frac{(p^3 + 3p^5 + 3p^7 + p^9)}{3} + O(p^4) \right) \\
&= 1 + \frac{2}{3}p^2 + O(p^3) > 1.
\end{aligned}$$

よって, p が 0 の極近傍ではオイラースキームと同様に数値解の位相は真の解に比べて遅く進み, そこから離れていくと早く進む.

(iv) 松野スキーム

松野スキームは $\lambda = 1 - p^2 + ip$ なので

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - p^2}.$$

となり台形スキームと同様の形になるので台形スキームと同じく p が 0 の極近傍では遅く進み, そこから離れると早く進む.

(v) ホインスキーム

ホインスキームは $\lambda = 1 - \frac{1}{2}p^2 + ip$ なので

$$\frac{\theta}{p} = \frac{1}{p} \arctan \frac{p}{1 - \frac{1}{2}p^2}.$$

台形スキームと松野スキームと同様で, p が 0 の極近傍では遅く進み, そこから離れると早く進む.

2.3 三段階スキーム

リープフロッグスキーム (leapfrog scheme)

振動方程式に対してリープフロッグスキームをあてはめた差分式は

$$U^{(n+1)} = U^{(n-1)} + 2i\omega\Delta t U^{(n)}. \quad (9.2.18)$$

三段階スキームを用いた場合初期値が $U^{(0)}$, $U^{(1)}$ の 2 つ必要になる. ここで $U^{(0)}$ は物理的な初期値, $U^{(1)}$ は $U^{(0)}$ から何らかの方法で計算し求めた初期値である.

増幅係数 λ を計算すると

$$U^{(n)} = \lambda U^{(n-1)}.$$

$$U^{(n)} = \frac{U^{(n+1)}}{\lambda} \text{ なので}$$

$$\frac{U^{(n+1)}}{\lambda} = \lambda U^{(n-1)}.$$

両辺に λ を掛けると

$$U^{(n+1)} = \lambda^2 U^{(n-1)}.$$

これを (9.2.18) に代入すると

$$\lambda^2 U^{(n-1)} = U^{(n-1)} + 2i\omega\Delta t \lambda U^{(n-1)}.$$

両辺を $U^{(n-1)}$ で割ると

$$\lambda^2 - 2i\omega\Delta t \lambda - 1 = 0.$$

これを解くと

$$\lambda = ip \pm \sqrt{1 - p^2}. \quad (9.2.19)$$

よって, λ の解は 2 つ存在する. 一般に m 段階スキームには $(m - 1)$ 個の増幅係数が現れる. それぞれの λ に対する数値解をモード (mode) と呼ぶ.

リープフロッグスキームの場合 (9.2.19) は

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - p^2} + ip,$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{1 - p^2} + ip$$

の2つの解になる。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えると λ_1 のときは $\lambda_1 \rightarrow 1$ で $U^{(n+1)} = U^{(n)}$, λ_2 のとき $\lambda_2 \rightarrow -1$ で $U^{(n+1)} = -U^{(n)}$ となり, λ_2 のときには反転してしまう。そこで λ_1 に対応する数値解を物理モード (physical modes), λ_2 に対応する数値解を計算モード (computational modes) と呼ぶことにする。実際の計算で得られる数値解は, これらのモードの重ね合わせになる。

重ね合わせを考える前に極端な例として $\omega = 0$ の場合を考える。そのとき

$$\frac{dU}{dt} = 0.$$

(9.2.18) からは

$$U^{(n+1)} = U^{(n-1)}$$

が得られる。これは $U^{(1)}$ の与え方によって解の振舞いが変わる。

$U^{(1)}$ が $U^{(0)}$ から正しく計算された場合

$$U^{(n+1)} = U^{(n)}.$$

これは $p \rightarrow 0$ の極限の λ_1 のモードに対応するので

$$U^{(n+1)} = \lambda_1 U^{(n)}.$$

この場合解は物理モードのみから構成される。

$U^{(1)}$ が $U^{(1)} = -U^{(0)}$ として与えられた場合

$$U^{(n+1)} = -U^{(n)}.$$

これは $p \rightarrow 0$ の極限での λ_2 のモードに対応するので

$$U^{(n+1)} = \lambda_2 U^{(n)}.$$

解は計算モードのみから構成される。

次に $\omega \neq 0$ の一般の場合を考える。その場合

$$\begin{aligned} U_1^{(n)} &= \lambda_1^n U_1^{(0)}, \\ U_2^{(n)} &= \lambda_2^n U_2^{(0)} \end{aligned}$$

の重ね合わせで表される。よって, a, b を定数とすると

$$U^{(n)} = a\lambda_1^n U_1^{(0)} + b\lambda_2^n U_2^{(0)}. \quad (9.2.20)$$

$U^{(0)}$ と $U^{(1)}$ を (9.2.20) を用いて表すと

$$U^{(0)} = aU_1^{(0)} + bU_2^{(0)}. \quad (9.2.21.a)$$

$$U^{(1)} = a\lambda_1 U_1^{(0)} + b\lambda_2 U_2^{(0)}. \quad (9.2.20.b)$$

これを $aU_1^{(0)}$ と $bU_2^{(0)}$ の連立方程式と考えて解くと

$$\begin{aligned} aU_1^{(0)} &= \frac{\lambda_2 U^{(0)} - U^{(1)}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \\ bU_2^{(0)} &= \frac{\lambda_1 U^{(0)} - U^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

これを (9.2.20) に代入すると

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \lambda_1^n \frac{\lambda_2 U^{(0)} - U^{(1)}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \frac{\lambda_1 U^{(0)} - U^{(1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\lambda_1^n (U^{(1)} - \lambda_2 U^{(0)}) - \lambda_2^n (U^{(1)} - \lambda_1 U^{(0)}) \right]. \quad (9.2.21) \end{aligned}$$

よって、物理モードの振幅は $|U^{(1)} - \lambda_2 U^{(0)}|$ に計算モードの振幅は $|U^{(1)} - \lambda_1 U^{(0)}|$ に比例することが分かる。(9.2.21) は $U^{(1)} = \lambda_1 U^{(0)}$ のとき

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n (\lambda_1 - \lambda_2) U^{(0)} \\ &= \lambda_1^n U^{(0)}. \end{aligned}$$

一方 $U^{(1)} = \lambda_2 U^{(0)}$ のとき

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n (\lambda_1 - \lambda_2) U^{(0)} \\ &= \lambda_2^n U^{(0)}. \end{aligned}$$

となり、どちらも $\omega = 0$ の場合に対応する。

$U^{(1)}$ は λ_1 から求めることができるが計算モードを必ず除去できるわけではない。また複雑な式になると解析的に物理モードを求めることができなくなる。よって $U^{(1)}$ は 2 段階スキームから求める。さらに、物理モードが厳密に分かっていても $U^{(n)}$ が差分式の厳密解にならない。これは計算機によって丸め誤差があるためである。