$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= f \\
f &= i\omega U
\end{aligned}
$$

として, 初期値 1, $\omega = \pi$ とする. このときの松野スキームとホインスキームの振舞いを見てみる.

松野スキーム

振動方程式の松野スキームは

$$U^{(n+1)*} = U^{(n)} + i\omega\Delta t U^{(n)}.$$

次に増幅値を求める.

$$
\begin{aligned}
U^{(n+1)} &= U^{(n)} + i\omega\Delta t \left(U^{(n+1)*}\right) \\
&= U^{(n)} + i\omega\Delta t \left(U^{(n)} + i\omega\Delta t U^{(n)}\right) \\
&= \left(1 + i\omega\Delta t + (i\omega\Delta t)^2\right) U^{(n)}.
\end{aligned}
$$

ここで $\lambda \equiv \dfrac{U^{(n+1)}}{U^{(n)}}$ とすると

$$\lambda = 1 + ip - p^2.$$

但し, $p \equiv \omega\Delta t$.

$\Delta t = \dfrac{2}{100}$ と, $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ として行った結果を表にまとめる.

	数値解の増幅率	増幅率の定義	Re$[U]$
$\Delta t = 0.02$	0.99803193520755129	0.99803193520755129	0.82107776
$\Delta t = 0.2$	0.87239347178370708	0.87239347178370708	-4.75382917E-02

	$\omega\Delta t$
$\Delta t = 0.02$	6.28318530717958679E-002
$\Delta t = 0.2$	0.62831853071795862

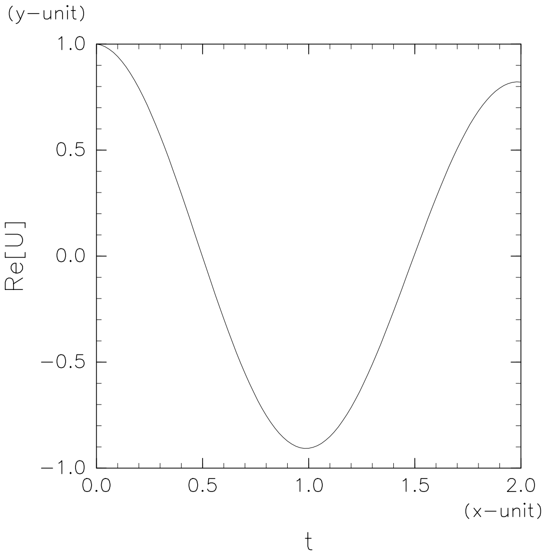

図 9.2.1: $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ の松野スキーム

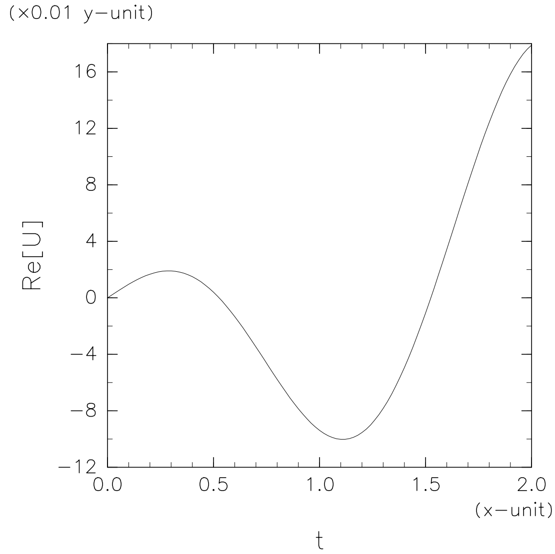

図 9.2.2: $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ の松野スキームと解析解との差

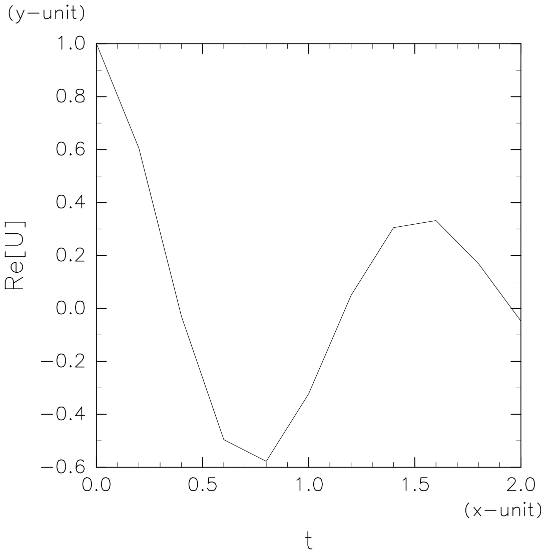

図 9.2.3: $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ の松野スキーム

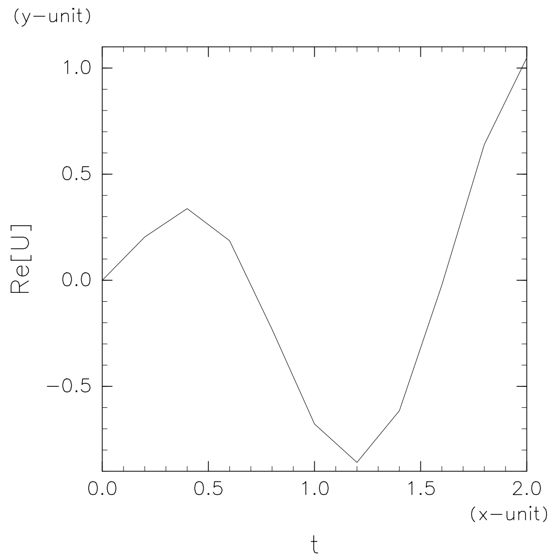

図 9.2.4: $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ の松野スキームと解析解との差

表から分かるように $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ のときは数値解の増幅率と解析解の増幅率はほぼ一

致し 1 に近くなる. そのため解析解 $e^{i\omega t}$ にほぼ一致する. しかし, 初期値よりもずれてしまい, 解析解との差がどんどん開いてしまう. また, $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ に下げると数値解の増幅率と解析解の増幅率は一致するが 1 から離れてしまい, 極値がずれて値が変わってしまう. 松野スキームは位相が解析解より, 早く進む. それが $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ だと如実に表れているためである.

ホインスキーム

ホインスキームの増幅係数は松野スキームと同様に求めると

$$
\begin{aligned}
U^{(n+1)} &= U^{(n)} + i\omega\Delta t\left(\frac{1}{2}U^{(n)} + \frac{1}{2}U^{(n+1)^*}\right) \\
&= U^{(n)} + i\omega\Delta t\left(\frac{1}{2}U^{(n)} + \frac{1}{2}U^{(n)} + i\omega\Delta t\frac{1}{2}U^{(n)}\right) \\
&= (1 + ip - \frac{1}{2}p^2)U^{(n)}.
\end{aligned}
$$

$$
\lambda = 1 + ip - \frac{1}{2}p^2.
$$

同様に $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ と, $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ として行った結果を表にまとめる.

	数値解の増幅率	増幅率の定義	Re[U]
$\Delta t = 0.02$	1.0000019481799232	1.0000019481799229	1.0001863
$\Delta t = 0.2$	1.0192956570169427	1.0192956570169427	1.1335322

	$\omega\Delta t$
$\Delta t = 0.02$	6.28318530717958679E-002
$\Delta t = 0.2$	0.62831853071795862

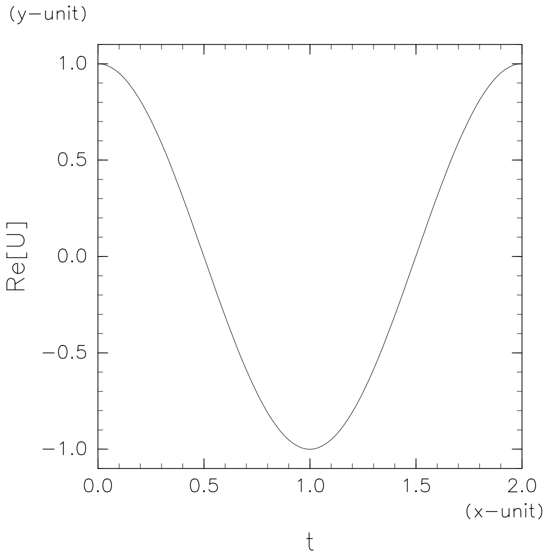

図 9.2.5: $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ のホインスキーム

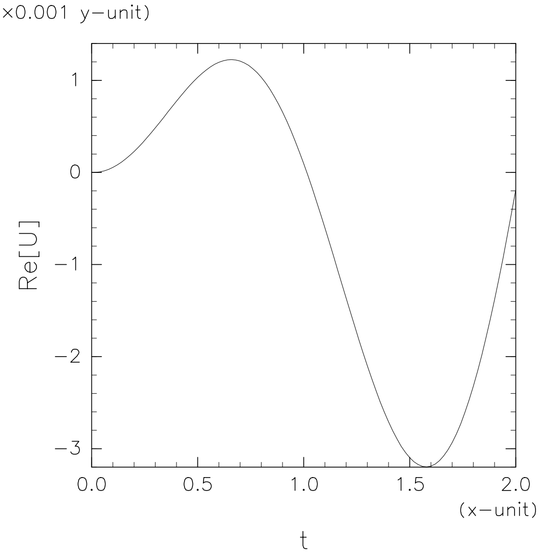

図 9.2.6: $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ のホインスキームと解析解との差

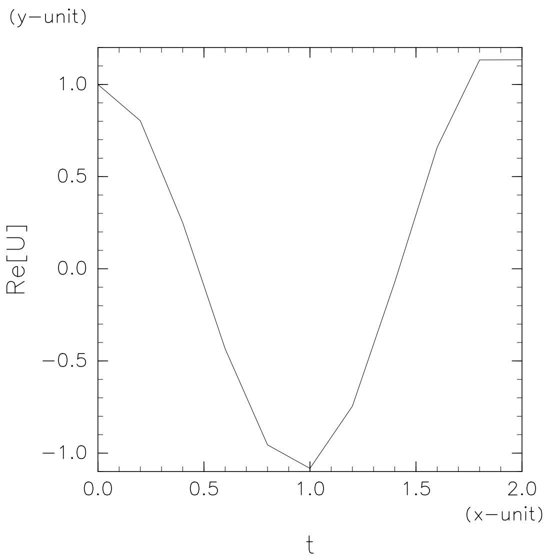

図 9.2.7: $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ のホインスキーム

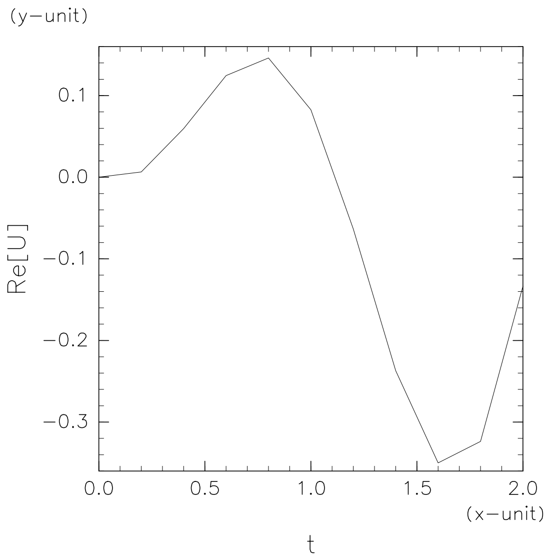

図 9.2.8: $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ のホインスキームと解析解との差

図から $\Delta t = \dfrac{2}{100}$ は途中で解析解との差が開いてしまうが最後に収束していきほぼ解析解に一致する. しかし, $\Delta t = \dfrac{2}{10}$ にすると最後の値が初期値より少し増えてし

まう. これは, $|\lambda|$ が $\sqrt{1+\frac{1}{4}p^4}$ であるので, この p^4 によって起こる. また, ホインスキームは解析解より位相が遅くなるはずだが今回用いた p が $p \ll 1$ とは言えないので差が出ない.