

## 第9章 偏微分方程式の数値解法の基礎 2-時間差分法-

### 3 摩擦方程式への応用

摩擦方程式とは以下のような方程式系である.

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= -\kappa U \\ U(0) &= U_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

具体例としては, 地表面付近の風ベクトルに対する地面摩擦の効果や, 拡散方程式の変形であらわれる<sup>\*1</sup>. (3.1) の厳密解は

$$U = U_0 e^{-\kappa t}\tag{3.2}$$

であり, e-folding time は  $\frac{1}{\kappa}$  である.

---

<sup>\*1</sup>拡散方程式は

$$\frac{du}{dt} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

であらわされる. これをフーリエ級数展開すると,

$$u = \text{Re}[U(t)e^{ikx}]$$

これを元の方程式に代入すると,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\sigma k^2 U$$

となり, 摩擦方程式と同じ形になる.

### 3.1 反復しない2段階スキーム

摩擦方程式を差分化すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\kappa U \\ \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} &= -\kappa(\alpha U^n + \beta U^{n+1}) \\ U^{n+1} &= U^n - \kappa\Delta t(\alpha U^n + \beta U^{n+1}) \\ &= U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{n+1}) \\ &= \frac{1 - K\alpha}{1 + K\beta} U^n \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし  $K = \kappa\Delta t$  である. 増幅係数  $\lambda$  は

$$\lambda = \frac{1 - K\alpha}{1 + K\beta} \quad (3.4)$$

となる. また安定条件は

$$\lambda \leq 1 \quad (3.5)$$

である.

1.  $\alpha = 1, \beta = 0$ (オイラースキーム) の場合

$$\lambda = 1 - K \quad (3.6)$$

このスキームの安定条件は

$$\begin{aligned} |1 - K| &\leq 1 \\ 0 < K &\leq 2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる. ただし  $K > 1$  のとき, 解は1ステップ毎に符号が変わってしまう<sup>\*2</sup> ため, 物理的要請から  $K < 1$  とする必要がある.

2.  $\alpha = 0, \beta = 1$ (後退スキーム) の場合

$$\lambda = \frac{1}{1 + K} \quad (3.8)$$

このスキームの安定条件は

$$\frac{1}{1 + K} \leq 1 \quad (3.9)$$

となり, 全ての  $K$  で安定である. このスキームでは常に  $0 < \lambda$  なので解が1ステップ毎に符号が変わってしまうことも無い.

<sup>\*2</sup> $\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}$  であるため,  $\lambda < 0$  となると,  $U^{n+1}$  と  $U^n$  はステップ毎に符号が逆転することになる

3.  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (台形スキーム) の場合

$$\lambda = \frac{2 - K}{2 + K} \quad (3.10)$$

このスキームの安定条件は

$$\frac{2 - K}{2 + K} \leq 1 \quad (3.11)$$

となり, 全ての  $K$  で安定である. ただし  $2 \leq K$  のとき, 解は 1 ステップ毎に符号が変わってしまうため, 物理的要請から  $K < 2$  とする必要がある.

### 3.2 反復する 2 段階スキーム

前節と同じく差分化すると以下のような形になる.

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^{(n)} - KU^n \\ U^{n+1} &= U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{(n+1)*}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

1.  $\alpha = 0, \beta = 1$ (松野スキーム) の場合

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^{(n)} - KU^n \\ U^{n+1} &= U^n - KU^{(n+1)*} \\ &= (1 - K + K^2)U^n \\ \lambda &= 1 - K + K^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

このスキームの安定条件は

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - K + K^2 \\ &= \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

より,  $0 < K < 1$  のとき安定で,  $K = \frac{1}{2}$  のとき最も減衰する.

2.  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (ホインスキーム) の場合

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^{(n)} - KU^n \\ U^{n+1} &= U^n - K \left( \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}(U^n - KU^n) \right) \\ &= \left( 1 - K + \frac{1}{2}K^2 \right) U^n \\ \lambda &= 1 - K + \frac{1}{2}K^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

このスキームの安定条件は

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - K + K^2 \\ &= \frac{1}{2}(K-1)^2 + \frac{1}{2} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

より,  $0 < K < 2$  のとき安定で,  $K = 1$  のとき最も減衰する.

### 3.3 3段階スキーム

#### 1. リープフロッグスキーム

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2KU^n \quad (3.17)$$

$\lambda = \frac{U^n}{U^{n-1}}$  を (3.17) に代入すると以下のように二つの  $\lambda$  が得られる.

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \frac{U^n}{\lambda} - 2KU^n \\ \lambda \frac{U^{n+1}}{U^n} + 2K\lambda - 1 &= 0 \\ \lambda^2 + 2K\lambda - 1 &= 0 \\ \lambda_1 &= -K + \sqrt{K^2 + 1} \\ \lambda_2 &= -K - \sqrt{K^2 + 1} \end{aligned}$$

ここで  $K \rightarrow 0$  の極限を考えると

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow 1 \\ \lambda_2 &\rightarrow -1 \end{aligned}$$

この  $\lambda_1$  に対応する解を物理モード,  $\lambda_2$  に対応する解を計算モードという.  $K > 0$  なので,  $|\lambda_2| > 1$  であり負の数である. よって, 物理モードは安定なもの, 計算モードは不安定かつステップ毎に符号が変わる. 解の中から計算モードを完全に取り除くのは不可能であるため, リープフロッグスキームは摩擦方程式を解くには不向きである.

## 2. アダムスバッシュフォーススキーム

$$\begin{aligned}
U^{n+1} &= U^n - K \left( \frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1} \right) \\
&= \left( 1 - \frac{3}{2}K \right) U^n + \frac{1}{2}KU^{n-1} \\
\lambda^2 - \left( 1 - \frac{3}{2}K \right) \lambda - \frac{1}{2}K &= 0 \\
\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}K + \sqrt{1 - K + \frac{9}{4}K^2} \right) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}K - \sqrt{1 - K + \frac{9}{4}K^2} \right)
\end{aligned}$$

ここで  $K \rightarrow 0$  の極限を考えると

$$\lambda_1 \rightarrow 1$$

$$\lambda_2 \rightarrow 0$$

この  $\lambda_1$  に対応する解が物理モード,  $\lambda_2$  に対応する解が計算モードである。  
 $|K| < 1$  の時, 以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\sim \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}K + \left( 1 - \left( K - \frac{9}{4}K^2 \right) \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( 2 - 2K + \frac{9}{8}K^2 \right) \\
&= 1 - K + \frac{9}{16}K^2 \\
\lambda_2 &\sim \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}K - \left( 1 - \left( K - \frac{9}{4}K^2 \right) \frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -K - \frac{9}{8}K^2 \right) \\
&= -\frac{K}{2} - \frac{9}{16}K^2
\end{aligned}$$

$K \ll 1$  のとき,  $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| \ll |\lambda_1|$  となる. この場合, 計算モードはステップ毎に符号が変化するが, 物理モードと重なると全体では符号は変化しなくなる (図参照).

よって, 摩擦方程式に対し  $|K| \ll 1$  であればアダムスバッシュフォーススキームは安定である.

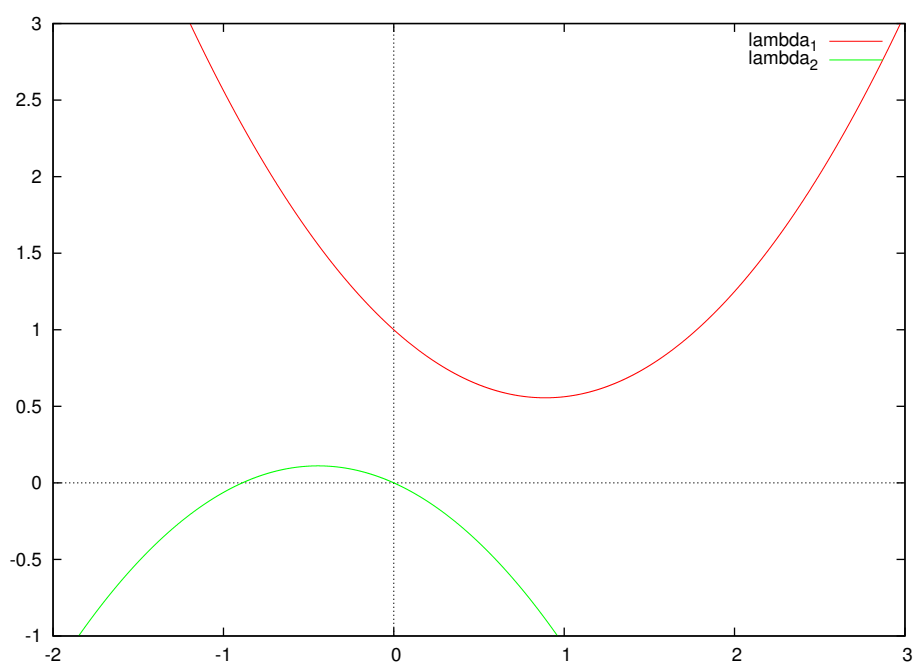


図 1: ab スキームにおける物理モードと計算モードをグラフにしたもの.  $K \ll 1$  の範囲で  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を足すと, 常に正になることが分かる. 縦軸  $\lambda$ , 横軸  $K$ .

### 3.4 異なるスキームを組み合わせて使う場合

例として以下のような式を解く場合を考える.

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U - kU \quad (3.18)$$

これは減衰振動の式であり, 振動方程式と摩擦方程式を組み合わせたものである. 振動方程式に対してはリープフロッグスキームが適するが, 同スキームは摩擦方程式に対しては不向きである. そのような場合には, 右辺の項ごとに異なるスキームを用いればよい. (3.18) の例では, 右辺第一項にリープフロッグスキーム, 第二項にオイラスキームを用いるという方法がある.

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2\Delta t} &= i\omega U^n - kU^{n-1} \\ U^{n+1} &= U^{n-1} + 2\Delta t (i\omega U^n - kU^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.19)$$