第10章　一次元移流方程式の数値解法

1　2 次精度中心差分を用いた線形移流方程式の離散化

1 次元線形移流方程式は以下の様に表される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{const.} \tag{10.1.1}$$

(10.1.3) の一般解は,

$$u = f(x - ct), \tag{10.1.2}$$

である. 最も簡単な離散化は, 時間方向にはオイラースキーム (前身差分), 空間方向には上流差分を用いたものである.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta t} = 0 \tag{10.1.1.a}$$

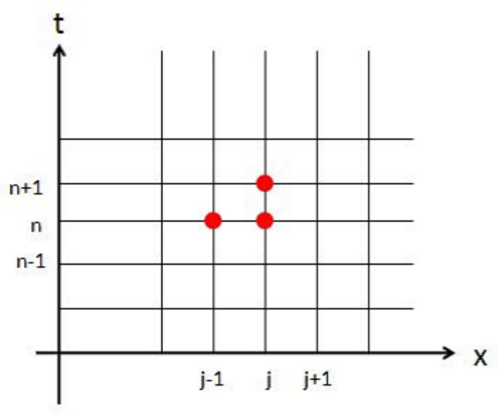

図 10.1.1: (10.1.1.a) で考える格子点に赤丸を付けた図.

この方法の精度は誤差

$$\epsilon \equiv u_j^n - u(j\Delta x, n\Delta t)$$

を計算することで分かる. 第 8 章での考察から,

$$\epsilon = O(\Delta t, \Delta x)$$

時間方向, 空間方向にも 1 次精度であることがわかる. もう少し精度の良い離散化方法を考える. 空間微分を中心差分を用いて離散化する.

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -c\frac{u_{j+1}u_{j-1}}{2\Delta x} \tag{10.1.3}$$

時間微分に関しても適切なスキームを用いて離散化する. ここではリープフロッグスキームを用いることにする.

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} &= \left(-c\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}\right)^n \\ &= -c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\end{aligned} \tag{10.1.4}$$

(10.1.4) で離散化した式の性質を知るため, u のとあるフーリエ成分 (波数成分) を取り出して考える.

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \mathrm{Re}[\Sigma \mathrm{U_k(t)e^{-ikx}}] \\ u_j^n &= \mathrm{Re}[\Sigma \mathrm{U_k(n\Delta t)e^{-ik(j\Delta x)}}]\end{aligned} \tag{10.1.5}$$

(10.1.4) に波数 k 成分を代入する.

$$\begin{aligned}\frac{U_k^{n+1}e^{-ik(j\Delta x)} - U_k^{n-1}e^{-ik(j\Delta x)}}{2\Delta t} &= -c\frac{U_k^n e^{-ik[(j+1)\Delta x]} - U_k^n e^{-ik[(j-1)\Delta x]}}{2\Delta x} \\ &= -c\frac{U_k^n e^{-ik\Delta x} - U_k^n e^{ik\Delta x}}{2\Delta x}e^{-ik(j\Delta x)} \\ &= -c\frac{U_k^n(2i\sin(k\Delta x))}{2\Delta x} \\ \frac{{U_k}^{n+1} - U_k^{n-1}}{2\Delta t} &= -i\left(\frac{c}{\Delta x}\sin(k\Delta x)\right){U_k}^n\end{aligned} \tag{10.1.6}$$

ここで,

$$\omega \equiv \frac{c}{\Delta x}\sin(k\Delta x) \tag{10.1.7}$$

と置くと, (10.1.6) は振動方程式に一致する.

$$U_k^{n+1} = U_k^{n-1} + 2i\left(-\frac{c}{\Delta x}\Delta t\sin(k\Delta x)\right){U_k}^n \tag{10.1.8}$$

ここで

$$p \equiv -\frac{c\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x) \tag{10.1.9}$$

とおくと,

$$U_k^{n+1} = U_k^{n-1} + 2ipU_k^n$$

振動方程式にリープフロッグスキームを用いた場合,

$$|p| \le 1$$
$$|\frac{c\Delta t}{\Delta x}| \le 1$$

が安定性条件. ここで, $|\sin(k\Delta x)| \le 1$ なので,

$$\left|\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right| \le 1$$
$$|c|\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1 \tag{10.1.10}$$

(10.1.10) は CFL 条件と呼ばれる.

1.1　高周波成分を用いた安定性の考察

安定性が最小となるのは $|p|$ が最大値をとる時である. $|p|$ が最大値をとるのは ($\Delta x, \Delta t$ を固定した), $\sin(k\Delta x)$ が最大となるときである. このとき, $k\Delta x = \frac{\pi}{2}$ である. それに対応する波長は $\frac{2\pi}{k} = 4\Delta x$ であり, 解像可能な最大波長の二倍である.

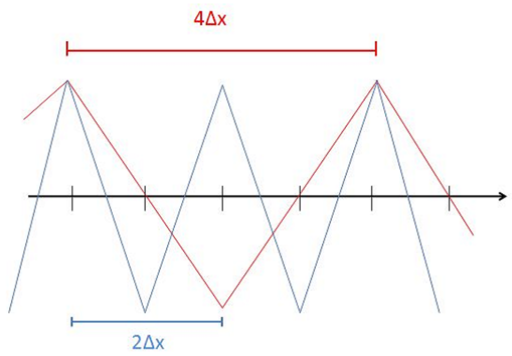

図 10.1.2: 青い線が解像可能な最大波長を持つ波, 赤い線が $|p|$ が最大値をとる時の波長を持つ波である.