

## 摩擦方程式

摩擦方程式とは以下のような方程式系である.

$$\frac{dU}{dt} = -\kappa U, \quad (1)$$

初期条件:  $U(0) = U_0$ .

ここで  $\kappa$  は摩擦係数である. 具体例としては, 地表面付近の風ベクトルに対する地面摩擦の効果や, 拡散方程式の変形であられる<sup>1)</sup>. (1) の厳密解は

$$U = U_0 e^{-\kappa t} \quad (2)$$

であり, e-folding time は  $\frac{1}{\kappa}$  である. 以下各スキームを摩擦方程式に適用する.

### 反復しない1段階スキーム

時間差分スキームの (16) 式に従って摩擦方程式 (1) 式を差分化する. 時間差分スキームの (16) 式は

$$\frac{dU}{dt} = f$$

に対して

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t(\alpha f^n + \beta f^{n+1}),$$

$$\alpha + \beta = 1$$

<sup>1)</sup> 拡散方程式は

$$\frac{du}{dt} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

であられる. これをフーリエ級数展開すると,

$$u = \text{Re}[U(t)e^{ikx}]$$

これを元の方程式に代入すると,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\sigma k^2 U$$

となり, 摩擦係数が  $\sigma k^2$  の摩擦方程式と同じ形になる.

となる. 摩擦方程式では  $f = -\kappa U$  であるので,

$$U^{n+1} = U^n - \kappa \Delta t (\alpha U^n + \beta U^{n+1})$$

となる. ここで  $K \equiv \kappa \Delta t$  であるとすると

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{n+1}) \\ &= (1 - K\alpha)U^n - K\beta U^{n+1}. \end{aligned}$$

$U^{n+1}$  について解くと

$$U^{n+1} = \frac{1 - K\alpha}{1 + K\beta} U^n \quad (3)$$

となる. 増幅係数  $\lambda$  は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{U^{n+1}}{U^n} \\ &= \frac{1 - K\alpha}{1 + K\beta} \end{aligned} \quad (4)$$

となる. また安定条件は

$$\lambda \leq 1$$

である.

1.  $\alpha = 1, \beta = 0$  (オイラースキーム) の場合

$$\lambda = 1 - K. \quad (5)$$

このスキームの安定条件は

$$\begin{aligned} |1 - K| &\leq 1, \\ 0 < K &\leq 2 \end{aligned}$$

となる. ただし  $K > 1$  のとき,  $\lambda < 0$  より解は 1 ステップ毎に符号が変わってしまう<sup>2)</sup> ため, 物理的要請から  $K \leq 1$  とする必要がある (図 1 参照). よって, 実際の安定条件は

$$0 < K \leq 1 \quad (6)$$

となる.

<sup>2)</sup>  $\lambda \equiv \frac{U^{n+1}}{U^n}$  であるため,  $\lambda < 0$  となると,  $U^{n+1}$  と  $U^n$  はステップ毎に符号が逆転することになる

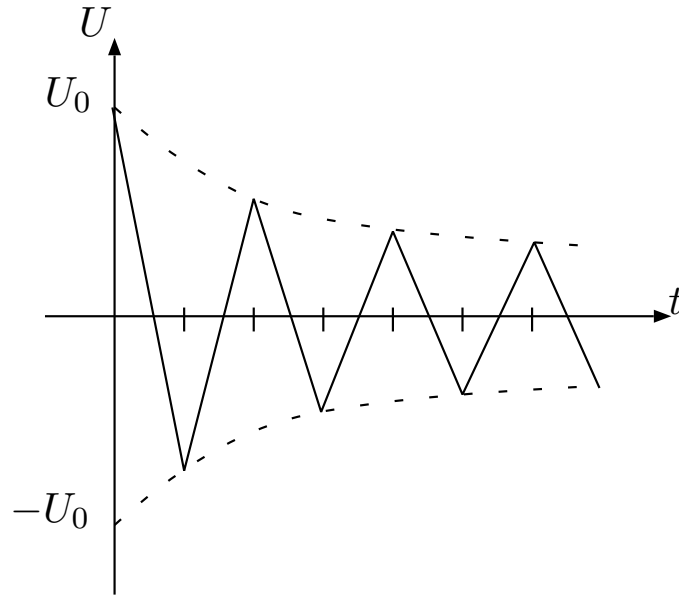


図 1:  $K > 1$  のときのオイラー法の数値解. 実線は数値解で一点鎖線が減衰を表す. 一回の計算ごとに符号が反転する.

2.  $\alpha = 0, \beta = 1$  (後退スキーム) の場合

$$\lambda = \frac{1}{1+K}. \quad (7)$$

このスキームの安定条件は

$$\frac{1}{1+K} \leq 1 \quad (8)$$

となり, 全ての  $K$  で安定である. このスキームでは常に  $0 < \lambda$  なので解が 1 ステップ毎に符号が変わってしまうことも無い.

3.  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  (台形スキーム) の場合

$$\lambda = \frac{2-K}{2+K}. \quad (9)$$

このスキームの安定条件は

$$\frac{2-K}{2+K} \leq 1$$

となり, 全ての  $K$  で安定である. ただし  $2 \leq K$  のとき  $\lambda < 0$  となり, 解は 1 ステップ毎に符号が変わってしまう. そのため, 物理的要請から  $K < 2$  とする必要がある. よって実際の安定条件は

$$0 < K \leq 2 \quad (10)$$

となる.

## 反復する1段階スキーム

前節と同じく時間差分スキームの (17), (18) 式を用いて差分化する. 反復する1段階スキーム (17), (18) 式は

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^n + \Delta t f^n, \\ U^{n+1} &= U^n - \Delta t(\alpha f^n + \beta f^{(n+1)*}), \\ \alpha + \beta &= 1 \end{aligned}$$

である. よって, 摩擦方程式 (1) では

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^{(n)} - KU^n, \\ U^{n+1} &= U^n - K(\alpha U^n + \beta U^{(n+1)*}). \end{aligned}$$

以下松野スキームとホインスキームの場合を考える.

### 1. $\alpha = 0, \beta = 1$ (松野スキーム) の場合

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^{(n)} - KU^n, \\ U^{n+1} &= U^n - KU^{(n+1)*}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n - K(U^n - KU^n) \\ &= (1 - K + K^2)U^n. \end{aligned} \tag{11}$$

増幅係数は

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - K + K^2 \\ &= \left(K - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned} \tag{12}$$

となる. このスキームの安定条件は

$$\left(K - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 1$$

より,  $K = \frac{1}{2}$  のとき最も減衰し, 安定条件は

$$0 < K \leq 1 \tag{13}$$

となる.

2.  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (ホインスキーム)の場合

$$\begin{aligned} U^{(n+1)*} &= U^{(n)} - KU^n, \\ U^{n+1} &= U^n - K \left( \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}U^{(n+1)*} \right) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n - K \left( \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}(U^n - KU^n) \right) \\ &= \left( 1 - K + \frac{1}{2}K^2 \right) U^n. \end{aligned} \quad (14)$$

増幅係数は

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - K + \frac{1}{2}K^2 \\ &= \frac{1}{2}(K - 1)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

このスキームの安定条件は

$$\frac{1}{2}(K - 1)^2 + \frac{1}{2} \leq 1$$

より,  $K = 1$  のとき最も減衰し, 安定条件は

$$0 < K \leq 2 \quad (16)$$

となる.

## 2 2段階スキーム

リープフロッグスキームと2段階アダムスバッシュフォーススキームの摩擦方程式への適用を考える.

### 1. リープフロッグスキーム

摩擦方程式 (1) をリープフロッグスキームで表すと,

$$U^{n+1} = U^{n-1} - 2KU^n \quad (17)$$

となる. 増幅係数  $\lambda = \frac{U^n}{U^{n-1}}$  を (17) 式に代入すると以下のように二つの  $\lambda$  が得られる.

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \frac{U^n}{\lambda} - 2KU^n, \\ \lambda \frac{U^{n+1}}{U^n} + 2K\lambda - 1 &= 0, \\ \lambda^2 + 2K\lambda - 1 &= 0. \end{aligned}$$

この二つの解をそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2$  とすると, それぞれ

$$\lambda_1 = -K + \sqrt{K^2 + 1}, \quad (18)$$

$$\lambda_2 = -K - \sqrt{K^2 + 1} \quad (19)$$

となる. ここで  $K \rightarrow 0$  の極限を考えると, それぞれ

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\rightarrow 1, \\ \lambda_2 &\rightarrow -1. \end{aligned}$$

この  $\lambda_1$  に対応する解を物理モード,  $\lambda_2$  に対応する解を計算モードという.  $K > 0$  なので,  $|\lambda_1| < 1$  で物理モードは安定条件を満たす. しかし, 計算モードは  $|\lambda_2| > 1$  であり  $\lambda_2 < 0$  である. よって, 物理モードは常に安定なものの, 計算モードは不安定かつステップ毎に符号が変わる.

解の中から計算モードを完全に取り除くのは不可能であるため, リープフロッグスキームは摩擦方程式を解くには不向きである.

## 2. 2段階のアダムスバッシュフォーススキーム

摩擦方程式 (1) を 2 段階のアダムスバッシュフォーススキームで表すと

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= U^n - K \left( \frac{3}{2}U^n - \frac{1}{2}U^{n-1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{3}{2}K \right) U^n + \frac{1}{2}KU^{n-1} \end{aligned} \quad (20)$$

となる. 増幅係数を代入すると,

$$\lambda^2 - \left( 1 - \frac{3}{2}K \right) \lambda - \frac{1}{2}K = 0$$

となる. よって,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}K + \sqrt{1 - K + \frac{9}{4}K^2} \right), \quad (21)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}K - \sqrt{1 - K + \frac{9}{4}K^2} \right). \quad (22)$$

ここで  $K \rightarrow 0$  の極限を考えると

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\rightarrow 1, \\ \lambda_2 &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

この  $\lambda_1$  に対応する解が物理モード,  $\lambda_2$  に対応する解が計算モードである.  
 $K \ll 1$  の時, 物理モードは以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\sim \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2}K + \left( 1 - \frac{1}{2} \left( K - \frac{9}{4}K^2 \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 - 2K + \frac{9}{8}K^2 \right) \\ &= 1 - K + \frac{9}{16}K^2 \\ &= \frac{9}{16} \left( K - \frac{8}{9} \right)^2 + \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

また, 計算モードも以下のように近似できる.

$$\begin{aligned}\lambda_2 &\sim \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{3}{2}K - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( K - \frac{9}{4}K^2 \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( -K - \frac{9}{8}K^2 \right) \\ &= -\frac{K}{2} - \frac{9}{16}K^2 \\ &= -\frac{9}{16} \left( K + \frac{4}{9} \right)^2 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

よって, 物理モードの安定条件は,

$$0 < K \leq \frac{16}{9}. \quad (23)$$

計算モードの安定条件は,

$$0 < K \leq (1 + \sqrt{13}) \frac{4}{9}. \quad (24)$$

計算モードは  $0 < K$  の範囲では常に  $\lambda_2 < 0$  となる. よって計算モードはステップごとに符号が変化する. しかし,  $K \ll 1$  であれば  $|\lambda_2| \ll |\lambda_1|$  となるので物理モードと重なると全体では符号は変化しなくなる (図 2 参照).

よって, 摩擦方程式に対し  $|K| \ll 1$  であればアダムスバッシュフォーススキームは安定である.

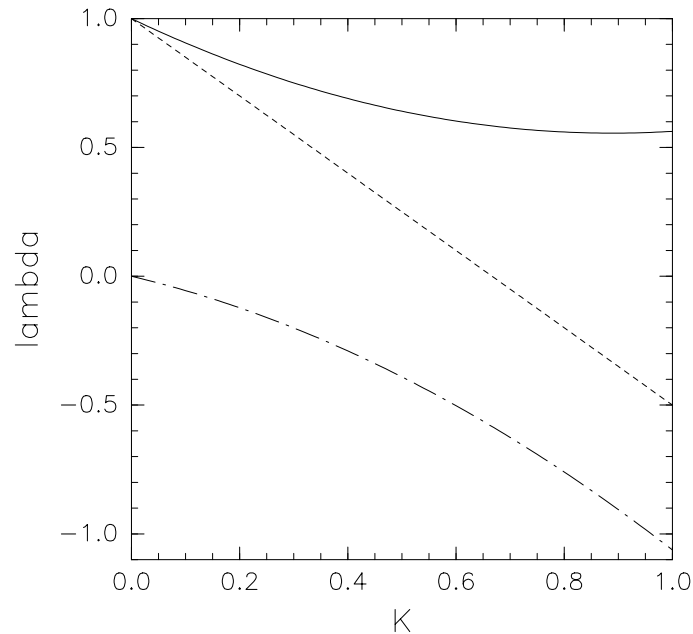


図 2: 2 段階アダムスバッシュフォーススキームにおける物理モードと計算モードを  $0 \leq K \leq 1$  の間でグラフにしたもの. 実線は  $\lambda_1$ , 一点鎖線は  $\lambda_2$ , 点線は  $\lambda_1 + \lambda_2$  の値を表す.  $K \ll 1$  の範囲で  $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  を足すと,  $0 < K < 0.6$  の範囲で常に正になることが分かる. 縦軸は  $\lambda$ , 横軸は  $K$ .

## 減衰振動方程式

摩擦方程式と振動方程式を合わせた以下の式を考える.

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U - \kappa U \quad (25)$$

これは減衰振動の式であり, 振動方程式と摩擦方程式を組み合わせたものである.

振動方程式に対してはリープフロッグスキームが適するが, 同スキームは摩擦方程式に対しては不向きである. そのような場合には, 右辺の項ごとに異なるスキームを用いればよい.

(25) 式では, 右辺第一項にリープフロッグスキーム, 第二項にオイラスキームを用いるという方法がある. 二つのスキームを (25) 式に用いると,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t (i\omega U^n - \kappa U^{n-1}) \quad (26)$$

となる. これは  $-\kappa U^{n-1}$  がないと振動方程式にリープフロッグスキームを適用した式であり,  $i\omega U^n$  がないと摩擦方程式で  $K = 2\kappa\Delta t$  として計算した sa オイラスキームの形になっている.



## 例題

次の減衰振動方程式を解く.

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U - \kappa U, \quad (27)$$

$$\text{初期条件: } U(0) = 1.0$$

振動数は  $\omega = \pi$ , 摩擦係数は  $\kappa = 0.25$  とする. 厳密解は

$$U = U(0) \exp[(i\omega - \kappa)t] \quad (28)$$

である.

用いたスキームは振動解にリーブフロッグスキーム, 減衰解にオイラスキームである. これらの二つのスキームを適用した式は

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t (i\omega U^n - \kappa U^{n-1}) \quad (29)$$

となる. 実際に  $\Delta t = \frac{\pi}{100}$  として解いたものが図3である.

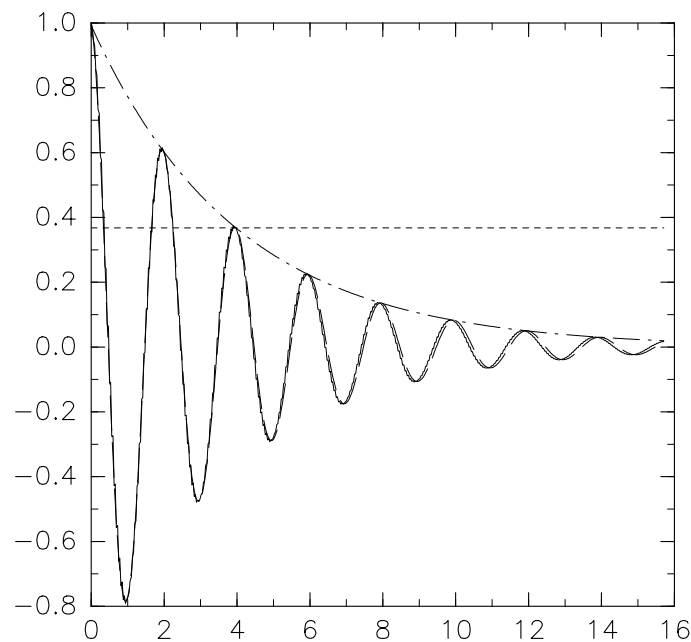


図3:  $\Delta t = \frac{\pi}{100}$  として解いた式. 実線は数値解, 破線は厳密解, 点線は  $e$  分の1の値, 一点鎖線は(27)式で  $\omega = 0$  とした場合の厳密解を表している.

実線は数値解, 破線は厳密解, 点線と実線が交わった時間が緩和時間, 一点鎖線は減衰解を表している. 厳密解よりも数値解がわずかに位相が早くなっている. これはリーブフロッグスキームの物理モードの位相は厳密解よりも早く進むためである.

また, 今回の緩和時間は  $\tau = \frac{1}{\kappa} = 4.0$  である. 実際に  $t = 4.0$  のときは

$$\begin{aligned} U &= U(0) \exp[-\kappa t] \\ &= U(0) \exp\left[-\frac{1}{4} \cdot 4\right] \\ &= U(0) \exp[-1] \end{aligned}$$

となり  $e$  分の 1 の値となっている.

安定条件は振動方程式でのリーブフロッグスキームの分と摩擦方程式でのオイラースキームの分で考える. リーブフロッグスキームの安定条件は

$$\omega \Delta t \leq 1$$

である. よって今回の場合は

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq \frac{1}{\omega} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

となる.

摩擦方程式の安定性条件は

$$K \leq 1$$

である. 今回の場合は

$$\begin{aligned} 2 \cdot \kappa \Delta t &\leq 1, \\ 2 \cdot \frac{1}{4} \Delta t &\leq 1, \\ \Delta t &\leq 2 \end{aligned}$$

となる. よって両方の安定性条件が満たされるためには

$$\Delta t \leq \frac{1}{\pi}$$

となる. つまり, リーブフロッグスキームの安定性条件によってきまる.

今回のような複数のスキームを使う場合には両方の安定性条件を満たさなければならぬのでより条件が厳しいスキームの安定性条件に制限される.