GFD ワーク 第 1 章は伊理正夫・藤野和建著「数値計算の常識」(以下, 伊理テキスト) の第 1 章を主に参考にしている.

# 誤差の定義と蓄積

## 誤差の定義

量 $x$ の測定値 $a$ に見込まれる誤差が $\Delta a\ (>0)$ であるというときには,

$$x \in (a-\Delta a, a+\Delta a) \tag{1.1}$$

すなわち,

$$a-\Delta a < x < a+\Delta a$$

であることを意味し,

$$x = a \pm \Delta a \tag{1.2}$$

と表記する[1). 実数 $x, y$ の関数として計算される量 $z = f(x,y)$ を考える. $y, z$ の測定値をそれぞれ $b, c$, 絶対誤差をそれぞれ $\Delta b, \Delta c$ とすると,

$$z = c \pm \Delta c \tag{1.3}$$

と表せる. ここで,

$$c = f(a,b) \tag{1.4}$$

[1)開区間と閉区間の表記法は以下のとおりである.

**開区間** $(a,b) = \{x|a < x < b\}$

**閉区間** $[a,b] = \{x|a \le x \le b\}$

**左閉右開区間, 左閉半開区間** $[a,b) = \{x|a \le x < b\}$

**左開右閉区間, 右閉半開区間** $(a,b] = \{x|a < x \le b\}$

であり,

$$
\begin{aligned}
(\text{誤差の大きさ}) &= |f(a \pm \Delta a, b \pm \Delta b) - f(a,b)| \\
&= \left| \left( f(a,b) \pm \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)_{x=a,y=b} \Delta a \pm \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)_{x=a,y=b} \Delta b \pm \cdots \right) - f(a,b) \right| \\
&= \left| \pm \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)_{x=a,y=b} \Delta a \pm \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)_{x=a,y=b} \Delta b \pm \cdots \right| \\
&\leq \left| \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right)_{x=a,y=b} \right| \Delta a + \left| \left( \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)_{x=a,y=b} \right| \Delta b \\
&\equiv \Delta c
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

と表すことができる. ただし, $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ はあまり大きくないと想定している.