浮動小数点

β 進数

計算機の中での実数の表現は“ 浮動小数点 ”の形であらわされる. その形は β 進数と 10 進数を併用した次の式で表される.

$$\pm(0.f_1 f_2 \cdots f_m)_\beta \times (\beta)_{10}{}^{\pm(E)_{10}}. \tag{1.1}$$

この表記の β 進数で表された部分を仮数部 (mantissa) と呼ぶ. ここでの f_i は 0 から $\beta - 1$ までの整数で $f_1 \neq 0$ としている[1]. 10 進表示された $\pm E_{10}$ のことを指数部 (exponent) と呼ぶ. この $(E)_{10}$ には 0 または正の整数が入る. β 進数も用いられている浮動小数点で表記された式を馴染みのある 10 進数のみの表記に戻すには

$$\pm(0.f_1 f_2 \cdots f_m)_\beta \times \beta_{10}{}^{\pm E_{10}} = \pm\left((f_1)_{10}(\beta)_{10}{}^{-1} + (f_2)_{10}(\beta)_{10}{}^{-2} + \cdots + (f_m)_{10}(\beta)_{10}{}^{-m}\right) \times (\beta)_{10}{}^{\pm(E)_{10}}. \tag{1.2}$$

10 進数と β 進数の相互変換:整数

10 進表示された整数 $(x)_{10}$ を $(a_k a_{k-1} \cdots a_0)_\beta (a_i = 0, 1, \cdots, \beta - 1)$ と表記された β 進数に変換するときは (??) 式より

$$(x)_{10} = (a_k)_{10}(\beta)_{10}{}^k + (a_{k-1})_{10}(\beta)_{10}{}^{k-1} + \cdots + (a_1)_{10}(\beta)_{10} + (a_0)_{10}$$

となるので $(x)_{10}$ を $(\beta)_{10}$ で割った余りを順に求めればよいということになる. 具体的に $(x)_{10} = (27)_{10}$ として 2 進表示してみる.

$$\begin{array}{rr l}
2) & 27 & \\ \hline
2) & 13 & \text{余り } 1 = a_0 \\ \hline
2) & 6 & \text{余り } 1 = a_1 \\ \hline
2) & 3 & \text{余り } 0 = a_2 \\ \hline
 & 1 = a_4 & \text{余り } 1 = a_3
\end{array}$$

なので,

$$(27)_{10} = (11011)_2$$

[1] $()_\beta$ と書かれた場合その中は β 進数で表記される. たとえば 10 進表示された値として 0.15625 という数値を考える. これを仮数部の様に表記すれば $(0.15625)_{10}$ となる. この数値は 16 進表示では $(0.28)_{16}$ と表記する. この値はどちらも同じ値である. つまり f_i は β によって値が変化する.

となる. 16 進表示は同じ方法でも求められるが 2 進表示が求められているときは下から 4 桁ごとに区切って, それぞれを 16 進表示に変換してもいい. 同じ例の場合

$$(1011)_2 = (11)_{10} = (B)_{16}$$

となるので残っている $(1)_2$ の部分はそのまま $(0001)_2$ としていいので

$$(0001)_2 = (1)_{16}$$

となる. よって

$$(27)_{10} = (1B)_{16}.$$

*

10 進数と β 進数の相互変換:純小数 10 進数の純小数 $(y)_{10}$ の β 進表示への変換は **(??)** 式より

$$(y)_{10} = (b_1)_{10}(\beta)_{10}{}^{-1} + (b_2)_{10}(\beta)_{10}{}^{-2} + \cdots + (b_m)_{10}(\beta)_{10}{}^{-m}$$

であるから, 小数部分を $(\beta)_{10}$ 倍してその整数部分を取り出していくことで求められる. 具体的に $(y)_{10} = (0.1)_{10}$ としたときの 16 進表示を求めてみる. まず $(0.1)_{10} = (b_1)_{10}16^{-1} + (b_2)_{10}16^{-2} + \cdots$ の式に 16 をかけると

$$(1.6)_{10} = (b_1)_{10} + (b_2)_{10}16^{-1} + (b_3)_{10}16^{-2} + \cdots .$$

b_i は 0 から $(\beta)_{10} - 1$ までの整数, つまり b_i の最大は 15 であるので b_1 より後ろの項の計は 1 以下になる. よって, $(b_1)_{16} = (1)_{16}$ となる. 次に両辺から b_1 を引いて同様に行うと

$$(9.6)_{10} = (b_2)_{10} + (b_3)_{10}16^{-1} + \cdots .$$

よって, $(b_2)_{16} = (9)_{16}$ となる. これを繰り返していくと

$$(b_2)_{16} = (b_3)_{16} = \cdots = (9)_{16}.$$

したがって

$$(0.1)_{10} = (0.19999\cdots)_{16} \tag{1.3}$$

2 進数にするには同様にやってもできるが整数のときと同じく 16 進表示から求める. 16 進表示された式を 2 進表示すると

$$\begin{aligned}(0.1)_{10} &= (0.000110011001100\cdots)_2 \\ &= (0.110011001100\cdots)_2 \times 2^{-3} \\ &= (0.CCC\cdots)_{16} \times 2^{-3} \qquad (1.4)\end{aligned}$$

となる.

*

10 進数と β 進数の相互変換:数値的な計算法 β 進表示された整数を 10 進数に戻す時には

$$(a_k a_{k-1} \cdots a_0)_\beta = (a_k)_{10}{(\beta)_{10}}^k + (a_{k-1})_{10}{(\beta)_{10}}^{k-1} + \cdots + (a_1)_{10}(\beta)_{10} + (a_0)_{10}$$

をそのまま計算していては効率が悪い. このままの場合は $(\beta)_{10}$ の乗算に $\dfrac{k(k+1)}{2}$ 回必要になる. そこで右辺にホーナー (Horner) 法を用いることで乗算の数を k 回まで下げられる.

$$\begin{aligned}(a_k a_{k-1} \cdots a_0)_\beta = \{\cdots\{\{(a_k)_{10} \cdot (\beta)_{10} + (a_{k-1})_{10}\} \cdot (\beta)_{10} + (a_{k-2})_{10}\} \cdot (\beta)_{10} \\ + \cdots\} \cdot (\beta)_{10} + (a_1)_{10}\} \cdot (\beta)_{10} + (a_0)_{10}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

β 進表示された純小数の場合は

$$(0.b_1 b_2 \cdots b_m)_\beta = (b_1 b_2 \cdots b_m)_\beta \times {(\beta)_{10}}^{-m}$$

とすれば整数のときと同様に計算できる.