

桁落ちに気をつけよう:絶対数の近い数の加減算による桁落ち

絶対値が極近い2数を足したり、引いたりして¹結果の絶対値が小さくなるような計算をすると有効数字が減る. このような現象を桁落ちという.

1 桁落ちの例1 極近い計算での桁落ち

例えば絶対値のごく小さな x が

$$x = 0.0031834 = 0.31834 \times 10^{-2}$$

という数として

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x}} \quad (1)$$

の値を計算せよと言われたとする. このとき左辺と右辺で値が変わってしまう. x と同じ有効数字5桁で6桁めで四捨五入するとき, (1)式の左辺の値は

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} &\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1.0032}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{1.0016} \\ &\approx 1 - 0.99840 \\ &\approx 0.00160 \end{aligned}$$

¹異符号のときは足す, 同符号のときは引く.

となり、最後の引き算で有効数字が3桁まで落ちてしまった。それに対して右辺の値は

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}} &\approx \frac{\sqrt{1.0032}-1}{\sqrt{1.0032}} \\ &\approx \frac{1.0016-1}{1.0016} \\ &\approx \frac{0.0016}{1.0016} \\ &\approx 0.0015974 \end{aligned}$$

となる。しかし、下線がついた有効数字3桁以降は誤差を含んでしまっている。そのため有効数字は2桁となってしまっている。有効数字が2桁になってしまったのは $1.0016 - 1$ の計算で有効数字が2桁になってしまったからである。

結局左辺のまま計算しても、右辺に変形しても有効数字は桁落ちを起こしてしまう。しかし、(1)式は、分子の有理化ともいべき形に変形すると全桁正しく計算できる。

(1)式を右辺の形まで変形する。その式を

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}} &= \frac{x}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \frac{x}{(1+x)+\sqrt{1+x}} \end{aligned} \tag{2}$$

と変形してから計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1+x)+\sqrt{1+x}} &\approx \frac{0.0031834}{1.0032+\sqrt{1.0032}} \\ &\approx \frac{0.0031834}{1.0032+1.0016} \\ &\approx \frac{0.0031834}{2.0048} \\ &= 0.0015879 \end{aligned}$$

となって、有効数字は5桁のままになる²。

(2)式の例は「式の変形で桁落ちを回避できることがある」ことを示している。数値計算の観点からみためるためにそれぞれの計算に必要な演算の回数を計算する。

(1)式の右辺はまず $\sqrt{1+x}$ の計算をやる。この計算には + が1回、 $\sqrt{\quad}$ が1回である。 $\sqrt{1+x}$ の計算した結果を変数に格納しておく。さらに $\sqrt{1+x}$ の計算結果から1を引く、格納しておいた変数を割る。この計算には - が1回、 \div が1回である。よって、(1)式の計算をまとめると

$$\begin{array}{cccc} + & - & \div & \sqrt{\quad} \\ \hline 1回 & 1回 & 1回 & 1回 \end{array}$$

²途中で引き算が入らないので桁落ちが起こらない。

となる. それに対して (2) 式の右辺の計算は $1+x$ の値を先に計算して $1+x$ の計算結果を変数に格納しておく. この計算に $+$ が 1 回, 格納しておいた変数の $\sqrt{\quad}$ をとり, 格納した変数と足し合わせる. この計算で $\sqrt{\quad}$ が 1 回, $+$ が 1 回. 最後に x を $\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)$ の計算した値で割る. よって \div が 1 回である. (2) 式の計算をまとめると

$$\frac{+ \quad \div \quad \sqrt{\quad}}{2 \text{回} \quad 1 \text{回} \quad 1 \text{回}}$$

となる. (1) 式も (2) 式も演算の種類の違いはあるが全体の計算の数は変わらない. よって数値計算の立場から言うと (1) 式と (2) 式でははっきり優劣がでてくる.

2 桁落ちの例 2 倍角・半角の公式での桁落ち

似たようなことは三角関数を含んだ式の場合にも起こる. よく知られた倍角・半角の公式

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

において, θ が小さいとき, 例えば

$$\theta = 1.23456^\circ$$

のとき,

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \sin^2 0.61728^\circ \\ &\approx (0.0107734)^2 \\ &\approx 1.16066 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

となるが, 右辺を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) &= \frac{1}{2}(1 - \cos 1.23456^\circ) \\ &\approx \frac{1}{2}(1 - 0.999768) \\ &\approx 1.16 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

このように $\cos \theta$ が 1 に極近いとき $1 - \cos \theta$ は桁落ちを起こすので $1 - \cos \theta$ を計算するときは $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ で, 計算した方がよい. つまり倍角より半角を使った方がよいということだ.

3 桁落ちの例3 根の公式の桁落ち

二次方程式でも同種の問題がある. 例えば根の公式をつかって

$$2.718282x^2 - 684.4566x + 0.3161592 = 0 \quad (4)$$

の根を 10 進 7 桁の精度で計算してみる. まず判別式は

$$\begin{aligned} D &= (684.4566)^2 - 4 \times 2.718282 \times 0.3161592 \\ &\approx 468480.8 - 3.437639 \\ &\approx 46847.44 \end{aligned}$$

となる. ゆえに

$$\sqrt{D} \approx 684.4541$$

で,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{684.4566 + 684.4541}{2 \times 2.718282} \\ &\approx \frac{1368.911}{5.436564} \\ &\approx 251.7970, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{684.4566 - 684.4541}{2 \times 2.718282} \\ &\approx \frac{0.0025}{5.436564} \\ &\approx 0.0004598493. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式の分子で極近い 2 数の引き算をしているので有効数字が 2 桁まで落ちてしまっている.

(1) 式を分子の有理化によって全桁の計算をしたように根の公式においても全桁に近い計算をする方法がある. 二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が 2 実根をもつとき, その根の公式

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (D \equiv b^2 - 4ac)$$

において、 $-b \pm \sqrt{D}$ の“±”は

「 $b > 0$ なら $-$, $b < 0$ なら $+$ 」

とする。そのとき一方の根 x_1 を定めて、もう一方の根 x_2 は「根と係数の関係」³

$$x_2 = \frac{c}{x_1} \tag{7}$$

により計算すると良い。

(4) 式では

$$\begin{aligned} x_2 &\approx \frac{(0.3161592)}{2.718282} \\ &\approx \frac{0.1163085}{251.7970} \\ &\approx 0.004619138 \end{aligned}$$

となり、最後の桁に「2」の狂いがあるだけである⁴。これは根の公式の分子を有理

3

$$(ax - b)(cx - d) = 0 \tag{a.1}$$

となる二次方程式を考える。これを展開すると、

$$acx^2 - (ad + cb)x + bd = 0. \tag{a.2}$$

また、二次方程式を

$$\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0 \tag{a.3}$$

とおくと、(a.2) 式より、

$$\begin{aligned} \alpha &= ac, \\ \beta &= ad + cb, \\ \gamma &= bd \end{aligned} \tag{a.4}$$

となる。さらに (a.1) 式の根をそれぞれ x_1, x_2 とおくと、

$$x_1 = \frac{b}{a}, x_2 = \frac{d}{c} \tag{a.5}$$

となる。(a.4) 式と (a.5) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\alpha} &= x_1 x_2, \\ x_2 &= \frac{\gamma}{\alpha x_1} \end{aligned}$$

である。

⁴ $x_2 = \frac{c}{ax_1}$ で計算すると全桁正しく計算できる。

$$x_2 \approx \frac{0.3161592}{2.718282 \times 251.7970} \approx \frac{0.3161592}{684.4553} \approx 0.0004619136$$

化したものを使っているともみなせる⁵.

4 桁落ちの例 4 重根の桁落ち

重根の場合も桁落ちが起こる. 例えば

$$2.718282x^2 - 1.854089x + 0.3161592 = 0$$

の判別式は, 10 進 7 桁の計算で

$$\begin{aligned} D &= (1.854089)^2 - 4 \times 2.718282 \times 0.3161592 \\ &\approx 3.437646 - 3.437639 \approx 0.000007 \end{aligned}$$

になり, D が 0 に近くなる⁶ということはごく近い数字の引き算をしているということなので有効数字も少なくなる.

次に \sqrt{D} を求める.

$$\sqrt{D} \approx 0.00264575$$

となる

⁵根の公式の分子の有理化する.

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ &= \frac{(-b \pm \sqrt{D})(-b \mp \sqrt{D})}{2a(-b \mp \sqrt{D})} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2a(-b \mp \sqrt{D})} \\ &= \frac{2c}{(-b \mp \sqrt{D})} \end{aligned}$$

となる. 一方 (7) 式の x_1 に根の公式を当てはめると,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{c}{x_1} \\ &= \frac{c}{a \times \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a}} \\ &= \frac{2c}{(-b \mp \sqrt{D})} \end{aligned}$$

となって同じになる.

⁶ D が 0 のとき重根になるので今回は 0 に近くなる

値が大きくなったように見えるがもともとの有効数字が1桁なのでこれも1桁になり、下線以下には意味がない。この値を根の公式に入れると、

$$\begin{aligned} x_1 &\approx \frac{1.854089 + 0.00264575}{2 \times 2.718282} \\ &\approx \frac{1.856735}{2 \times 2.718282} \\ &\approx 0.3415273, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &\approx \frac{1.854089 - 0.00264575}{2 \times 2.718282} \\ &\approx \frac{1.851443}{2 \times 2.718282} \\ &\approx 0.3405539 \end{aligned}$$

ただし、有効数字は3桁で下線には意味がない。

重根の場合は計算手順をいくら工夫しても桁落ちを避けることはできない。計算に伴う誤差がグラフを描いたときの「線」の太さを増加させるようなものだと考えれば、有効数字を増やすということはグラフと軸との交点の大きさを小さくしていくことになる。しかし、今回の場合は線が太くなっているためグラフと軸の交点の幅も大きくなる。しかも、重根なのでグラフと軸の接している長さが長くなる。その分点により大きくなってしまいうので誤差を減らすことが難しくなる(図 2.1 参照)。

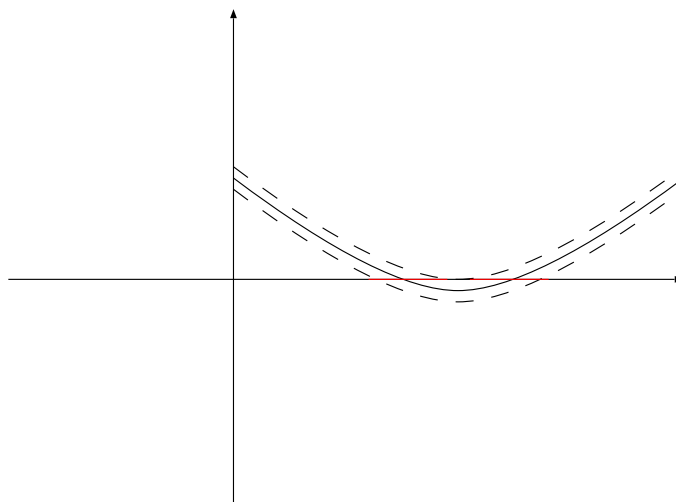


図 2.1: 重根の誤差.

一般に「m重根の有効数字の桁数は、計算桁数の $\frac{1}{m}$ になる」といわれている⁷。

⁷なんでそうなるかわからない

5 大まかな誤差の求め方

多項式 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ において特定の x に対して計算するとき生じる誤差 δ を求める. x の計算ごとにだいたい ϵ の誤差がでるとしたら,

$$\delta = P(x + \epsilon) - P(x)$$

となる⁸. よって,

$$\begin{aligned} \delta &= a_0(x + \epsilon)^n + \dots + a_{n-k}(x + \epsilon)^k + \dots + a_{n-1}(x + \epsilon) + a_n - (a_0x^n + \dots + a_{n-k}x^k + a_{n-1}x + a_n) \\ &= a_0x^n(1 + \frac{\epsilon}{x})^n + \dots + a_{n-k}x^k(1 + \frac{\epsilon}{x})^k + \dots + a_{n-1}x(1 + \frac{\epsilon}{x}) + a_n - (a_0x^n + \dots + a_{n-k}x^k + a_{n-1}x + a_n) \end{aligned}$$

$\frac{\epsilon}{x} \ll 1$ なのでそれぞれの項をマクローリン展開し, 1次まで求めるとすると,

$$\begin{aligned} \delta &\approx a_0x^n(1 + n\frac{\epsilon}{x}) + \dots + a_{n-k}x^k(1 + k\frac{\epsilon}{x}) + \dots + a_{n-1}x(1 + \frac{\epsilon}{x}) + a_n - (a_0x^n + \dots + a_{n-k}x^k + a_{n-1}x + a_n) \\ &= n\frac{\epsilon}{x}a_0x^n + \dots + k\frac{\epsilon}{x}a_{n-k}x^k + \dots + \frac{\epsilon}{x}a_{n-1}x. \end{aligned}$$

k 次の項の絶対値が他の項の絶対値に比べて大きいとする. そのとき, 多項式の計算の誤差を決めるのは k 次の項によって大まかに見積もられる. よって,

$$\delta \approx \left| k \frac{\epsilon}{x} a_{n-k} x^k \right|.$$

さらにそれぞれの項の誤差は浮動小数点の表示による表現誤差なので今, β 進 m 桁四捨五入で考えているとすると $\frac{\epsilon}{x}$ は第2章の(2.9)式より

$$\frac{\epsilon}{x} \approx \frac{\beta^{-(m-1)}}{2}$$

である. よって,

$$\delta \approx \left| k \frac{\beta^{-(m-1)}}{2} a_{n-k} x^k \right| \tag{8}$$

となる.

6 代数方程式の根の計算

桁落ちは特殊な現象ではなく, 方程式を数値的に解くときなどは常に桁落ちを起こしているようなものである. たとえば前述でも出てきた(4)式

$$2.718282x^2 - 684.4566x + 0.3161592 = 0$$

⁸この計算ではそれぞれの項の掛け算によって出る誤差を計算しているがそれぞれの項を足し合わせるときに出る誤差は無視している. また, それぞれの項で出る誤差もだいたい同じものであるとしている.

において (5) 式に近い $x = 251.7980$ とする. このとき, (4) 式の左辺にホーナー (Horner) 法を用いて式を変形し代入すると,

$$\begin{aligned} & (2.718282 \times 251.7980 - 684.4566) \times 251.7980 + 0.3161592 \\ & \approx ((684.4580 - 684.4566)) \times 251.7980 + 0.3161592 \\ & \approx 0.0014 \times 251.7980 + 0.3161592 \\ & \approx 0.3525172 + 0.3161592 \\ & \approx 0.6686764 \end{aligned}$$

このように $((684.4580 - 684.4566))$ の計算で激しい桁落ちが生じ, 結果として有効数字 2 桁の数字となる. この計算の誤差を大まかに見積もる. 10 進 7 桁四捨五入の計算をしているので相対誤差は $\frac{10^{-6}}{2}$. 1 次と 2 次の項の値がだいたい同じなので両方の項の誤差を考えなければならない. よって, (8) 式より誤差は

$$\begin{aligned} \delta & \approx \left| 2 \frac{10^{-6}}{2} \times 2.718282 \times (251.7980)^2 \right| + \left| \frac{10^{-6}}{2} \times (-684.4566) \times 251.7980 \right| \\ & \approx (2 + 1) \frac{10^{-6}}{2} \times 172345 \\ & \approx 0.26 \end{aligned}$$

となる. (4) 式の左辺の値が誤差にだいたい同じくらいになったらそれ以上 x の値を調節しても意味がなくなる. 一方, $x = 0.0004619157$ として, (4) 式の左辺に上記と同様にホーナー法を用いた計算をすると,

$$\begin{aligned} & (2.718282 \times 0.0004619157 - 684.4566) \times 0.0004619157 + 0.3161592 \\ & \approx (0.001255617 - 684.4566) \times 0.0004619157 + 0.3161592 \\ & \approx -684.4553 \times 0.0004619157 + 0.3161592 \\ & \approx -0.3161606 + 0.3161592 \\ & \approx -0.0000014 \end{aligned}$$

となり, 今度は最後の引き算で桁落ちが生じている. さらに, 上記と同様に (4) 式の左辺の計算で生じる誤差を見積もってみる. 今回は 1 次の項が大きく 2 次の項はそれに比べてはるかに小さい. よって, (8) 式より

$$\begin{aligned} \delta & \approx \frac{10^{-6}}{2} \times (-684.4566) \times 0.0004619157 \\ & \approx \frac{10^{-6}}{2} \times 0.32 \\ & \approx 0.0000002 \end{aligned}$$

となる. この値より精度良くは求まらない.

(4) 式でみたように同じ式の0でもどのくらい0に近くなればよいかを決めるには加減算で生じる誤差を考えなければならない.

代数方程式の根を求めるために, 根の近くで多項式の値を計算するときには, ある大きさの絶対値をもった項の和や差で, 結果が0に近くなるような計算をするために必ず桁落ちが生じてしまう. よって, 数値計算をするうえでは乗除算より加減算のほうがはるかに注意が必要になる.